PROGRAMA EDUCATIVO DE MECÁNICA ÁREA INDUSTRIAL

MANUAL DE PRÁCTICAS: FUNCIONES MATEMÁTICAS

(Basado en Competencias Profesionales)

ELABORADO POR:

CUERPO COLEGIADO DE DIRECTORES Y PROFESORES

DICIEMBRE 2017

INDICE

1.- Geometría y Trigonometría

1.1 Perímetro, área y volumen.

1.2 Ángulos y triángulos.

1.3 Trigonometría.

2.- Geometría Analítica

2.1 La recta en el sistema cartesiano.

2.2 Cónicas.

3.- Funciones

3.1 Conceptos de funciones.

3.2 Operaciones con funciones.

3.3 Aplicaciones de funciones.

4.- Álgebra Vectorial

Programa educativo			
Unidad	1	**Asignatura:**	Funciones Matemáticas
Práctica N°:	1.1	**Nombre de la práctica:**	Geometría
Nombre Integrante(s):			
Introducción:	Una figura geométrica es un conjunto no vacío cuyos elementos son puntos. Las figuras geométricas son el objeto de estudio de la geometría, rama de las matemáticas que se dedica a analizar las propiedades y medidas de las figuras en el espacio o en el plano. Los cuerpos geométricos existen en el espacio y son por lo tanto objetos que tienen tres dimensiones (ancho, alto y largo) limitados por una o más superficies. Si todas las superficies son planas y de contorno poligonal, el cuerpo es un poliedro. Si el cuerpo no está limitado por polígonos, sino por superficies curvadas recibe el nombre de cuerpos redondos. La fórmula para calcular el volumen de un cuerpo depende de su forma.		
Objetivo:	Analizar, interpretar y dar soluciones a problemas de figuras y cuerpos geométricos.		
Marco teórico	Etimológicamente hablando, la palabra Geometría procede del griego y significa “Medida de la Tierra”. La Geometría es la parte de las Matemáticas que estudia las idealizaciones del espacio en términos de las propiedades y medidas de las figuras geométricas. La Geometría no estudia el espacio real en sí mismo, sino objetos ideales (también conocidos como objetos matemáticos o geométricos), sus propiedades, relaciones y teorías, construidos por abstracción de cualidades del espacio real o de otros objetos ideales creados previamente (en el espacio real no existen círculos, pentágonos, rectas, puntos, esferas… sino objetos que tienen forma de… o modelizados por…; la realidad física siempre es menos perfecta que la realidad geométrica pensada o ideal). Así, podremos estudiar la forma de una ventana como la de la Figura 1 y sus propiedades.		

Figura 1 Ventana en forma de triángulo.

Esta ventana tiene la propiedad de que tiene forma de triángulo, pero no es un triángulo, ya que un triángulo es un concepto abstracto, ideal, que no puede encontrarse en la realidad.

Los componentes elementales de las figuras geométricas serán:

1. Punto: Un punto es un objeto que no tiene dimensiones que indica una posición en el espacio. Se suelen designar con letras mayúsculas A, B, C,… P,…

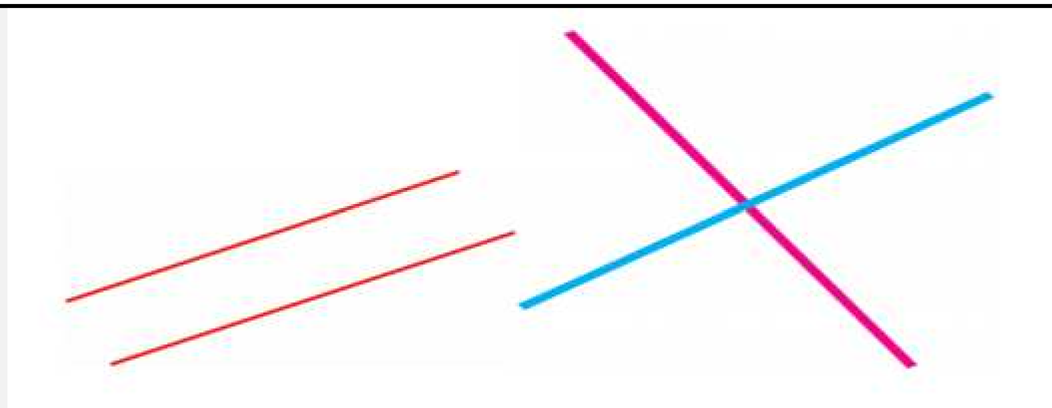
2. Recta: Es una línea ilimitada por ambos extremos. Se suele denotar con letras minúsculas r, s, t,… Como representación en la realidad de una recta podemos tomar un hilo tenso, o el borde de una regla.

3. Plano: es una superficie ilimitada cuya concreción en el mundo real puede verse, por ejemplo, en la superficie de una mesa, una hoja de papel, etc.

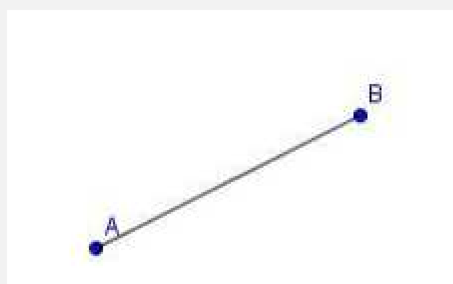
Los puntos son objetos de la geometría lineal, puntos y rectas dan lugar a la geometría plana y los puntos, las rectas y los planos son objetos de la geometría espacial.

Algunas consideraciones a tener en cuenta en geometría son las siguientes: Dos puntos distintos determinan una y sólo una línea recta que contiene a dichos puntos. Tres o más puntos pueden determinar varias rectas, pero si están todos contenidos en una se dirá que los puntos son colineales. Tres puntos no colineales determinan un plano.

2.- RECTAS y SEGMENTOS: Dos rectas contenidas en el plano que no tienen ningún punto en común se dice que son paralelas (Ilustración 2). Si tienen un solo punto en común se dice que son concurrentes o secantes (Ilustración 3). Una recta que corta a otras dos se dice que es una transversal.



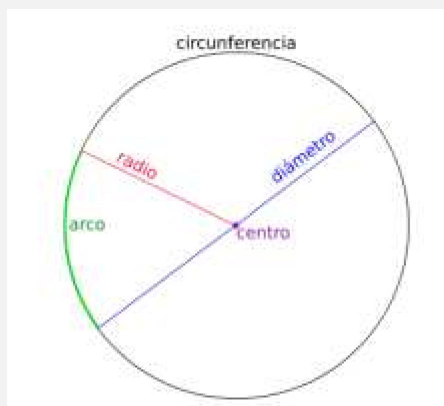
Todo punto P divide a la recta que lo contiene en dos subconjuntos llamados semirrectas o rayos de extremo P. También podemos construir semiplanos cuando quitamos a un plano una recta del mismo. Cada una de las dos divisiones hechas será un semiplano. Un segmento es un conjunto de puntos comprendido entre dos puntos. Si los extremos del segmento son los puntos A y B, el segmento se suele representar por AB. La distancia entre los dos extremos del segmento se llama longitud del segmento. Además, puede definirse también como la intersección de dos semirrectas contenidas en una misma recta.



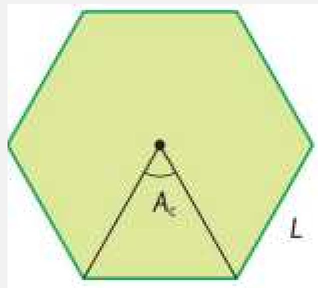
3.- ÁNGULOS: Un ángulo es la región del plano resultado de la intersección de dos semiplanos cerrados obtenida a partir de dos rectas incidentes. Para medir los ángulos se pueden distintas unidades: a) Radianes: un radián es la medida del ángulo cuyo arco tiene una longitud igual al radio de la circunferencia en la que está comprendido. b) Grados sexagesimales: es la medida del ángulo cuya longitud de arco es igual a la 360ava parte de la longitud de la circunferencia. Sus divisiones son minutos y segundos, que se representan por ‘ y ‘’ respectivamente. Para operar con ángulos dados de esta forma se trabaja en base 60. c) Grados centesimales: es la medida del ángulo cuya longitud de arco es igual a la 400ava parte de la longitud de la circunferencia. Sus divisiones son minutos y segundos centesimales.

4.- Circunferencia: Una curva se puede describir intuitivamente como el conjunto de puntos que un lápiz traza al ser desplazado por el plano sin ser levantado. Si el lápiz no pasa por un mismo punto dos veces, se dice que la curva es simple. Si el lápiz se levanta en el mismo punto en que se comenzó a trazar la curva, se dice que la curva es cerrada. Una circunferencia es una curva cerrada que verifica que la distancia a cualquiera de sus puntos a otro punto fijo que se llama centro es constante. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto dado, del centro de la circunferencia. Elementos de la circunferencia: - centro: es el punto fijo equidistante de cualquier punto de la circunferencia. - Radio: es un segmento que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia. - Cuerda: es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. - Diámetro: es una cuerda que pasa por el centro.

- Arco: cada una de las dos partes en que una cuerda divide a una circunferencia.



5.- Polígonos: Una curva simple que está formada por segmentos unidos por sus extremos se dice que es una curva poligonal. Si dicha curva es cerrada se dice que es un polígono. A estos segmentos se les llama lados y a los extremos de esos segmentos se les llama vértices. Si todos los lados de un polígono son iguales se dice que es regular. Los polígonos se van a nombrar según el número de lados o vértices que tienen (triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono,…) Polígonos regulares: - Un polígono que tiene todos sus lados iguales se dice que es equilátero. - Un polígono convexo cuyos ángulos interiores son todos congruentes se dice que es equiángulo. - Un polígono convexo que tiene todos sus lados y ángulos iguales se dice que es regular. En un polígono regular de n lados, cualquier ángulo con vértice en el centro y cuyos lados contienen vértices adyacentes del polígono se dice que es un ángulo central del polígono.



El **área** es una medida de extensión de una superficie, expresada en unidades de medida, denominadas unidades de superficie. El área es un concepto métrico que requiere que el espacio donde se define se especifique una medida.

Para superficies planas, el concepto es más intuitivo. Cualquier superficie plana de lados rectos, por ejemplo un polígono, puede triangularse y se puede calcular su área como suma de las áreas de dichos triángulos. Ocasionalmente se usa el término "área" como sinónimo de superficie, cuando no existe confusión entre el concepto geométrico en sí mismo (superficie) y la magnitud métrica asociada al concepto geométrico (área).

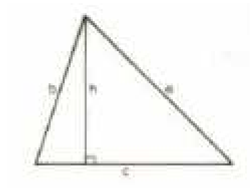
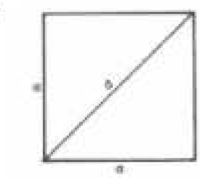
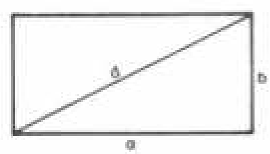
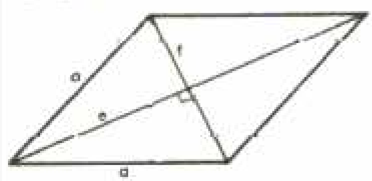
Sin embargo, para calcular el área de superficies curvas se requiere introducir métodos de geometría diferencial. En esta práctica solo se trabajará con superficies planas.

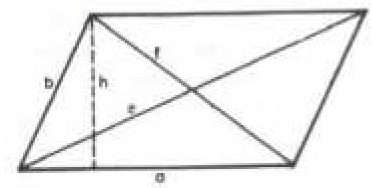
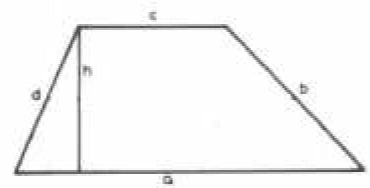
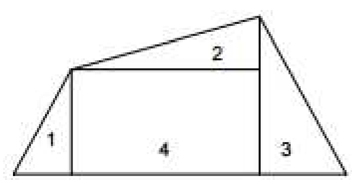
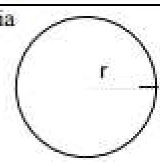
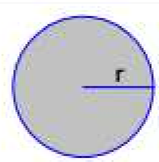
Área de los poliedros regulares: El área total de un poliedro se determina calculando el área de una cara y multiplicando por el número de caras.

El **perímetro** es la suma de las longitudes de los de una figura geométrica.

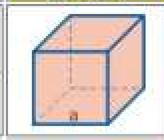
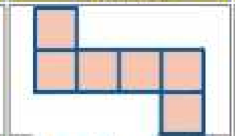
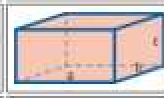
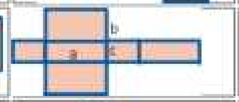
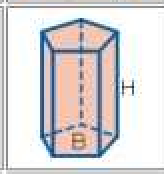
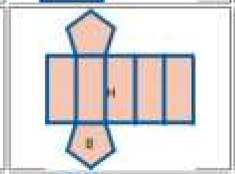
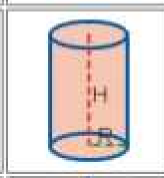
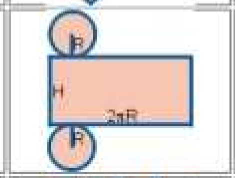
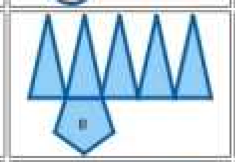
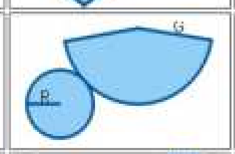
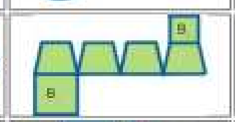
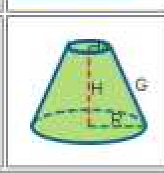
Volumen de los poliedros regulares: Todos los vértices de un poliedro regular equidistan de un punto interior llamado centro. Haciendo pasar planos por este punto y por todas las aristas, el poliedro queda descompuesto en tantas pirámides iguales como caras tiene. Para calcular el volumen de un poliedro será suficiente calcular el volumen de una de estas pirámides y multiplicar por el número de caras del poliedro.

PERÍMETRO Y ÁREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Figura Geométrica	Perímetro y Área
Triángulo 	$p = a + b + c$ $A = \dfrac{base \cdot altura}{2} = \dfrac{c \cdot h}{2}$
Cuadrado 	$p = 4a$ $A = lado \cdot lado = a^2$ $A = \dfrac{d^2}{2}$
Rectángulo 	$p = 2a + 2b$ $A = base \cdot altura = a \cdot b$
Rombo 	$p = 4a$ $A = \dfrac{diagonal\ mayor \cdot diagonal\ menor}{2} = \dfrac{e \cdot f}{2}$

Paralelogramo 	$p = 2a + 2b$ $A = base \cdot altura = a \cdot h$
Trapecio 	$p = a + b + c + d$ $A = \frac{(base1 + base2) \cdot altura}{2} = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$
Trapezoide 	$p = a + b + c + d$ $A = A1 + A2 + A3 + A4$
Circunferencia 	$p = 2\pi \cdot r$
Círculo 	$A = \pi \cdot r^2$

Cuerpos Geométricos

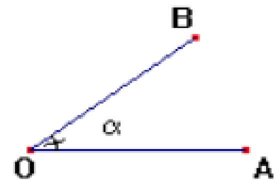
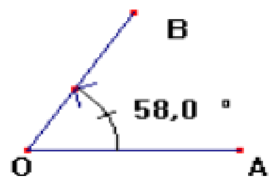
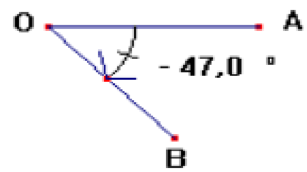
Nombre	Dibujo	Desarrollo	Área	Volumen
Cubo o Hexaedro			$A = 6a^2$	$V = 6a^3$
Paralelepípedo u ortoedro			$A = 2(ab+ac+bc)$	$V = abc$
Prisma			$A_T = 2A_B + A_L$	$V = A_B H$
Cilindro			$A_T = 2A_B + A_L$ $A_B = \pi R^2$ $A_L = 2\pi RH$	
Pirámide			$A_T = A_B + A_L$	$V = \frac{1}{3} A_B H$
Cono			$A_T = A_B + A_L$ $A_B = \pi R^2$ $A_L = \pi RG$	
Tronco de pirámide			$A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$	$V = \frac{1}{3}(A_{B1} + A_{B2} + \sqrt{A_{B1} \cdot A_{B2}} \cdot H)$
Tronco de cono			$A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$ $A_{B1} = \pi R^2$ $A_{B2} = \pi r^2$ $A_L = \pi(R + r)G$	
esfera			$A = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

PROBLEMAS	Para cada uno de los siguientes problemas, resolver mediante la siguiente metodología. a) Datos del problema. b) Incógnitas del problema. c) Identificación de las formulas a utilizar. d) Solución del problema. e) Interpretación de resultados. **PROBLEMARIO I:** PERÍMETRO, ÁREA Y VOLUMEN 1.-En las fiestas de un pueblo han montado una carpa para las verbenas, cuya forma es la de un polígono regular de 11 lados. La carpa está rodeada por una guirnalda con bombillas que tiene una longitud total de 68 m. ¿Cuánto mide el lado de la carpa? 2.- Una vela triangular de una barca se ha estropeado y hay que sustituirla por otra. Para confeccionar la nueva vela nos cobran 21 euros por m^2. ¿Cuánto costará esa nueva vela si debe tener 8 m de alto y 4 m de base? 3.- Una empresa fabrica sombrillas para la playa. Para ello usa tela cortada en forma de polígono regular. Calcula la cantidad de tela que necesitará para fabricar 36 sombrillas de 10 lados si sabemos que el lado mide 173 cm y su apotema mide 266,21 cm. 4.- Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2500 mm de alto. 5.- Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 6 euros el metro cuadrado. a) ¿Cuánto costará pintarla? b) ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla? 6.- En un almacén de dimensiones de 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones de 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuántas cajas podremos almacenar? 7.- Calcula la altura de un prisma que tiene como área de la base 12 dm^2 y 48 litros de capacidad. 8.- La cúpula de una catedral tiene forma semiesférica, de radio 50 m. Si restaurarla tiene un costo de 300 euros el m^2, ¿a cuánto ascenderá el presupuesto de la restauración? 9.- Para una fiesta, Luis ha hecho 10 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz? 10.- Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.

Programa educativo			
Unidad	1	**Asignatura:**	Funciones Matemáticas
Práctica N°:	1.2	**Nombre de la práctica:**	Trigonometría
Nombre Integrante(s):			
Introducción:	La palabra “Trigonometría” procede del griego y su significado es “medida de triángulos”. Así, se considera la trigonometría como aquella parte de la matemática que trata de los elementos de los triángulos, tanto planos como esféricos. No obstante a pesar del concepto de trigonometría que se acaba de ofrecer, hoy en día la trigonometría posee otras muchas importantes aplicaciones que no se refieren específicamente a los triángulos. Muchos fenómenos físicos se representan de un modo regular o periódico, por ejemplo, el movimiento de un péndulo oscila de modo regular; el voltaje de un circuito de corriente alterna oscila constantemente entre los valores positivos y negativos; incluso las estaciones del año tienen un ciclo perfectamente definido. Por lo anterior, se dice que estos fenómenos tienen cambios periódicos. Para el estudio de estos cambios periódicos, se usan modelos matemáticos, en los cuales las funciones trigonométricas son fundamentales.		
Objetivo:	Conocer y aplicar las relaciones de los triángulos, las leyes del comportamiento de las funciones trigonométricas, así como los principios de los mismos y la integración a las ciencias exactas y a la ingeniería.		

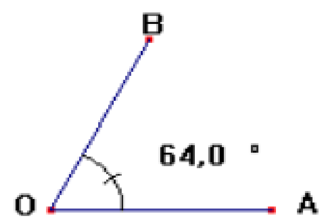
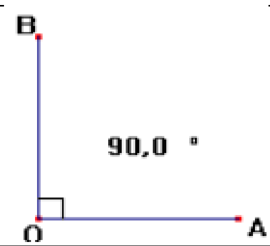
Marco Teórico:

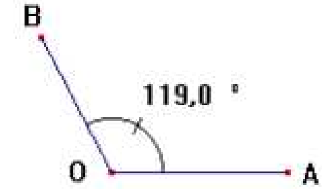
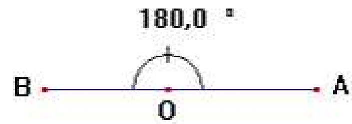
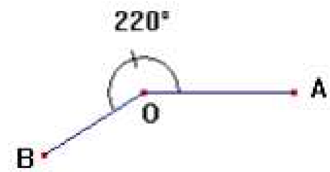
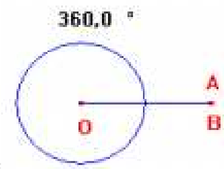
ÁNGULOS Y TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN	FIGURA	OBSERVACIONES
Ángulo. Es la abertura formada por dos semirrectas unidas en un solo punto llamado vértice.		Donde: α = Ángulo O = Vértice OA = Lado inicial OB = Lado terminal
Un ángulo es positivo si su sentido de giro es contrario a las manecillas del reloj.		Observe que se mide en sentido que indica la flecha.
Un ángulo es negativo si su sentido de giro es a favor de las manecillas del reloj.		Observe que su medida en sentido que indica la flecha.

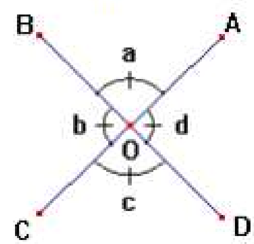
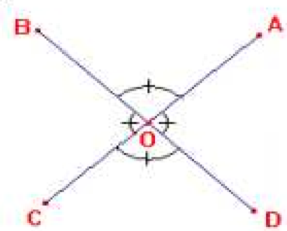
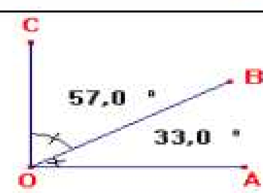
Clasificación de ángulos:

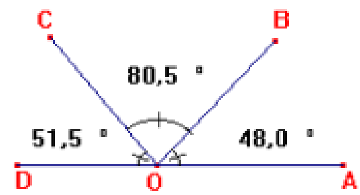
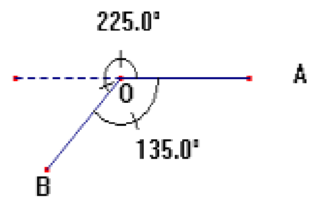
a) Por su magnitud los ángulos se clasifican en:

Nombre y definición	Figura	Característica
Ángulo agudo. Es aquel cuya magnitud es menor de 90º .		AOB < 90º
Ángulo recto: es aquel que mide exactamente 90º . Y se marca con un pequeño rectángulo en el vértice.		AOB = 90º

Ángulo obtuso. Es aquel cuya magnitud es mayor de 90º y menos a 180º .		90º < AOB < 180º
Ángulo colineal o llano. Es aquel cuya magnitud es igual a 180º .		AOB = 180º
Ángulo entrante. Es aquel cuya magnitud es mayor de 180º y menor de 360º .		180º < AOB < 360º
Ángulo perígono. Es aquel cuya magnitud es igual a 360º .		AOB = 360º

b) Por su posición los ángulos se clasifican en:

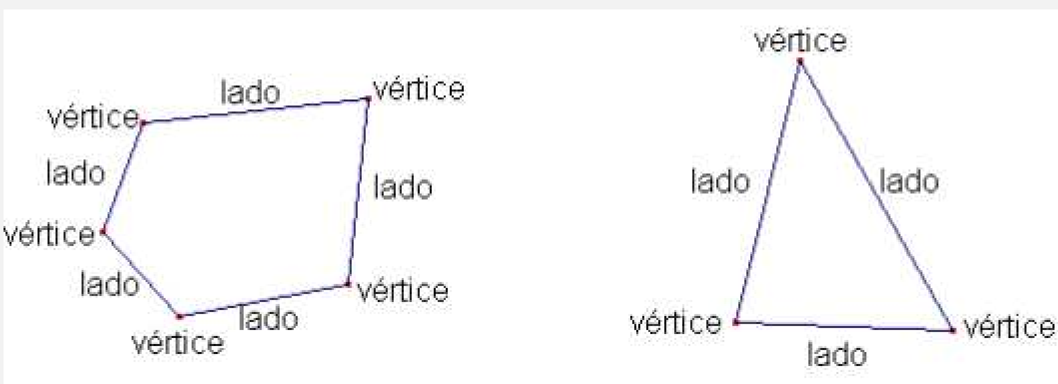
Nombre y definición	figura	Observaciones
Ángulos adyacentes. Son los que están formados de manera que un lado es común y los otros lados pertenecen a la misma recta.		Son ángulos adyacentes: a,b ; b,c ; c,d ; d,a
Ángulos opuestos por el vértice. Son dos ángulos que se encuentran uno enfrente de otro al cruzarse dos rectas en un punto llamado vértice.		Ángulos opuestos por el vértice: AOB = COD AOD = BOC
Ángulos Complementarios. Son dos ó mas ángulos que al sumarlos su resultado es igual a 90°.		AOB + BOC = 90° 33° + 57° = 90°

Ángulos suplementarios. Son dos ó mas ángulos que al sumarlos su resultado es igual a 180°		AOB+BOC+COD = 180° 48° + 80.5° + 51.5° = 180°
Ángulos conjugados. Son dos ó mas ángulos que al sumarlos su resultado es igual a 360°		AOB + BOA = 360°

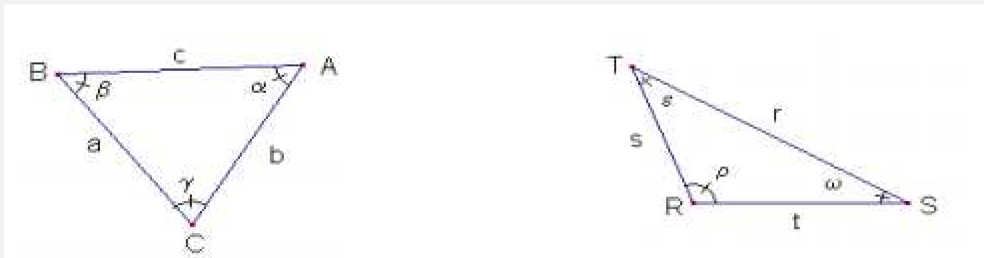
TRIÁNGULOS

Es un polígono el cual está limitado por tres lados los cuales forman entre sí tres ángulos, también se puede definir como el plano limitado por tres rectas las cuales se cortan dos a dos.

El punto en el cual se unen los puntos o se cruzan las rectas se llaman vértices y los segmentos de recta son conocidos como lados, las partes interiores se llaman ángulos esto lo podemos observar en las siguientes figuras:



Un triángulo se denota colocando tres letras mayúsculas en sus vértices y en los lados opuestos se colocan las letras minúsculas que correspondan en conclusión podemos decir que un triángulo está compuesto por tres elementos que son: 3 ángulos, 3 lados y tres vértices, lo cual lo podemos observar en las siguientes figuras:

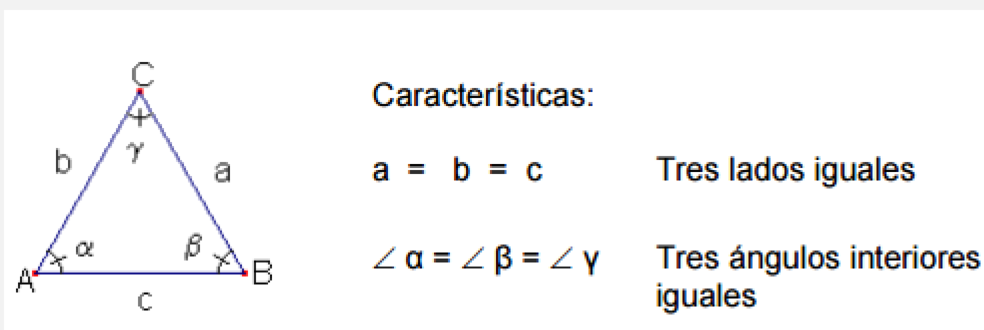


Los triángulos se pueden clasificar

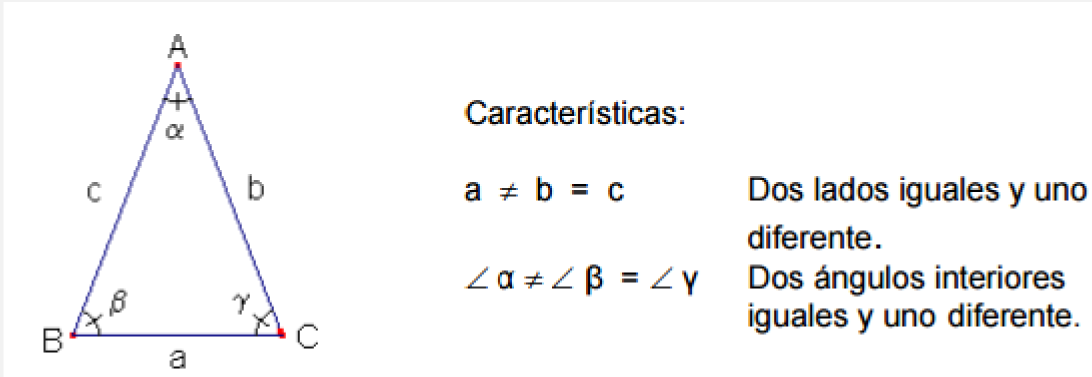
a) Por la magnitud de sus lados.
b) Por la magnitud de sus ángulos.

1.- Por la magnitud de sus lados tenemos:

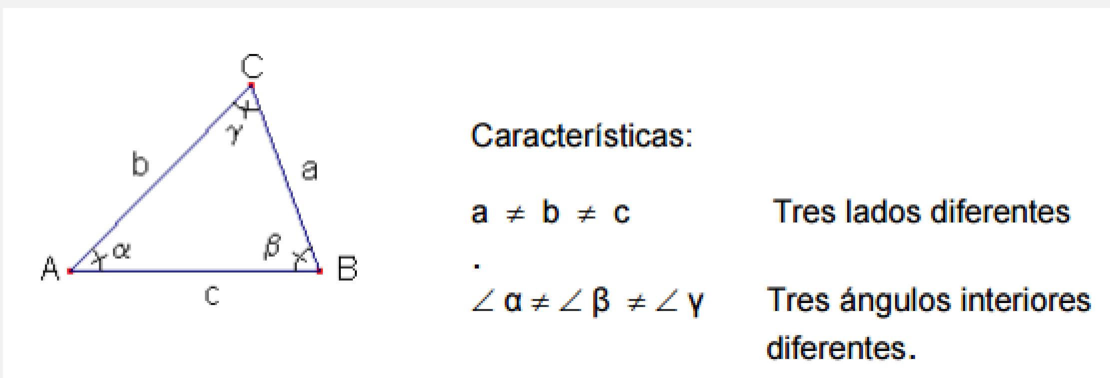
Equilátero.- En este tipo de triangulo se observa que sus tres lados tienen la misma magnitud como se observa en la figura.



Isósceles.- En este caso dos de sus lados son iguales mientras que el tercer lado es diferente y esto lo podemos observar en la figura siguiente:

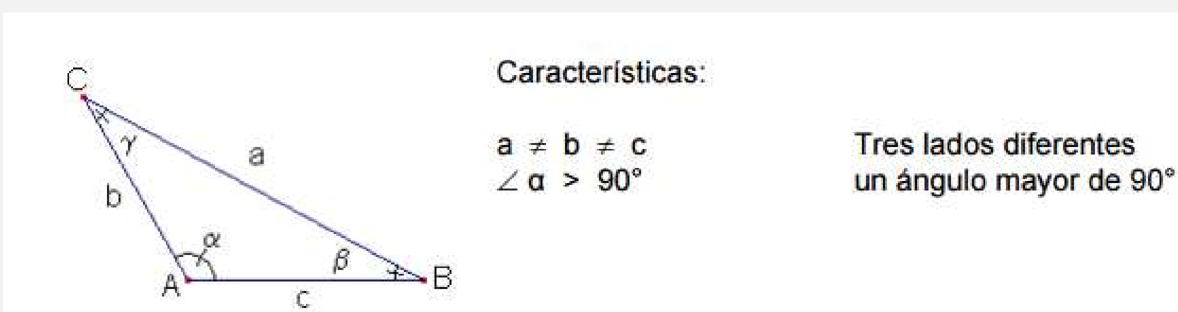


Escaleno.- En este último triángulo la magnitud de sus lados es diferente completamente, esto lo observamos en la figura siguiente:

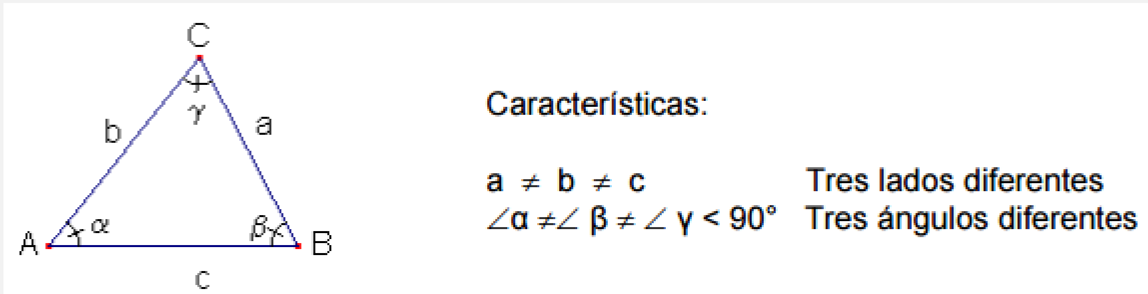


2.- Por la longitud de sus ángulos.

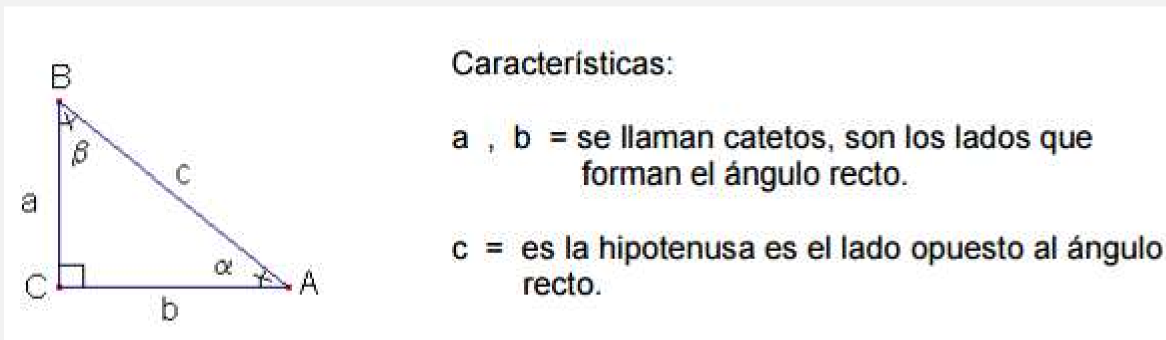
Obtusángulo.- Es aquel que tiene un ángulo obtuso como el que se muestra en la siguiente figura:



Acutángulo.- es el que tiene sus tres ángulos agudos, como el que se muestra en la siguiente figura.

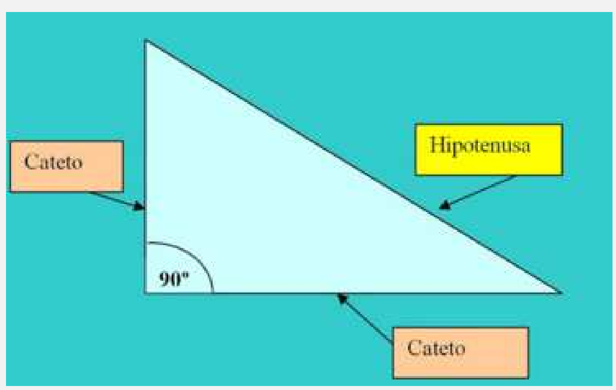


Rectángulo.- Este tipo de triángulo tiene un ángulo recto (90°), mientras que sus otros dos lados tienen nombres especiales.



TEOREMA DE PITAGORAS

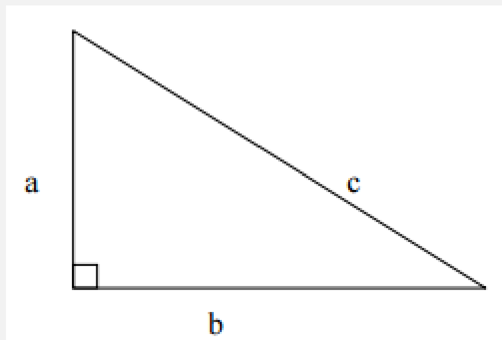
Un triángulo rectángulo es un triángulo que tiene un ángulo recto (90^0). El teorema de Pitágoras es una teoría de los ángulos rectos que fue descubierta alrededor de 2500 años atrás por un matemático griego llamado Pitágoras. Esta teoría se llama teorema porque Pitágoras pudo demostrar que es cierto para todos los triángulos rectos sin ninguna excepción.



Los catetos son los lados que forman el ángulo recto. La hipotenusa es el lado que está frente al ángulo recto, ya que el ángulo recto siempre es el más grande de cualquier triangulo, la ***hipotenusa*** siempre es el lado más largo del mismo triángulo recto.

Ahora veamos lo que dice el Teorema de Pitágoras. Suponga que **a y b** representan el largo de los catetos y **c** por la mediad de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

El Teorema dice que si elevas al cuadrado los catetos, luego la suma de esos cuadrados es igual al cuadrado de la hipotenusa, como se muestra en la siguiente figura.

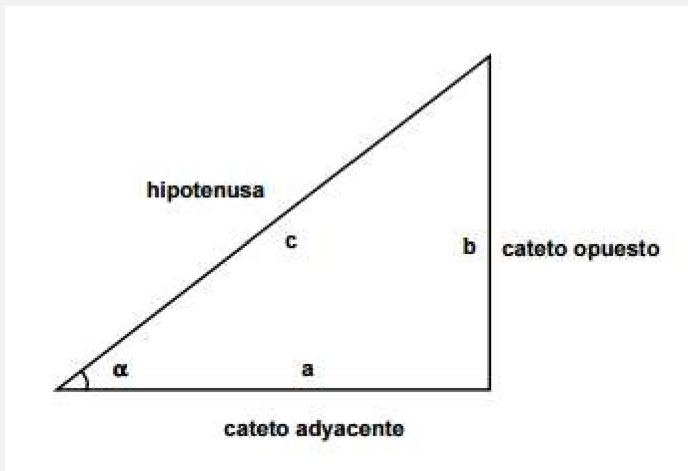


Teorema de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

RAZONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Un ángulo es la porción de plano limitada por dos semirrectas con origen en un mismo punto. Las semirrectas se llaman lado inicial y final. Al origen común se le denomina vértice del ángulo. Los ángulos positivos se miden en sentido contrario a las agujas del reloj y los negativos en el mismo sentido. La trigonometría estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Su etimología proviene de trigono (triángulo) y metría (medida). Sea el siguiente triángulo rectángulo:



Se definen las siguientes razones trigonométricas directas para el ángulo α:

seno: $$\operatorname{sen} \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

cotangente: $$\cot \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{a}{b}$$

coseno: $$\cos \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

secante: $$\sec \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{c}$$

tangente: $$\tan \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{b}{a}$$

cosecante: $$\csc \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{b}$$

En términos de variables, las funciones trigonométricas son: y = sen x, y = cot x, y = cos x,

y = sec x, y = tan x, y = csc x

De las definiciones anteriores, se puede concluir que:

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

En caso de tener el valor de la razón trigonométrica, para obtener el ángulo, se aplica la razón trigonométrica inversa. Las seis razones trigonométricas inversas para el ángulo α son las siguientes:

seno inverso: $\alpha = \text{sen}^{-1} x$

coseno inverso: $\alpha = \cos^{-1} x$

tangente inversa: $\alpha = \tan^{-1} x$

cotangente inversa: $\alpha = \cot^{-1} x$

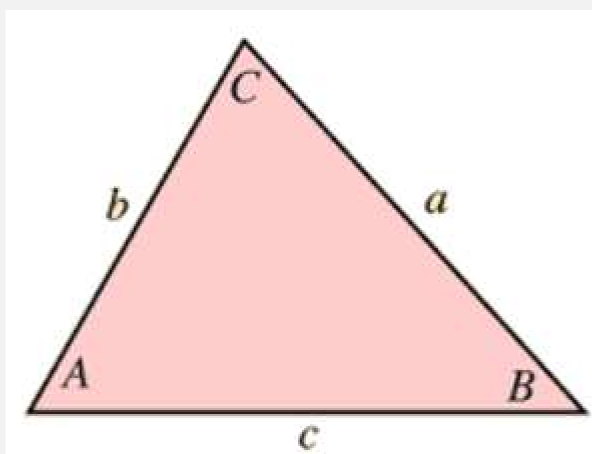
secante inversa: $\alpha = \sec^{-1} x$

cosecante inversa: $\alpha = \csc^{-1} x$

LEY DE LOS SENOS

La ley de los senos es una herramienta básica para resolver triángulos de cualquier tipo y establece que:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$



Esta ley se utiliza cuando se conocen:

1) Dos ángulos interiores del triángulo y uno de sus lados.
2) Dos lados del triángulo y el ángulo opuesto a cualquiera de estos lados.

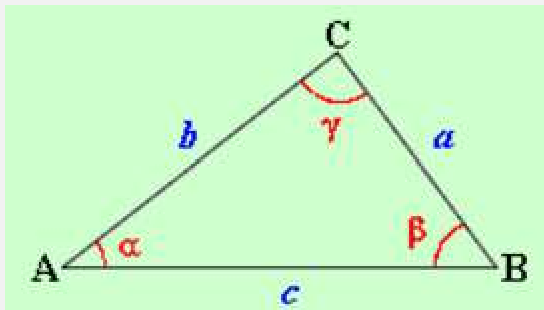
LEY DE LOS COSENOS

Al igual que la ley de los senos, la ley de los cosenos también es una herramienta básica para resolver triángulos de cualquier tipo y establece que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C$$



Esta ley se utiliza para determinar la longitud de un lado del triángulo cuando se conocen los otros dos lados y el ángulo opuesto al lado que se desea calcular. También se utiliza cuando se conocen los tres lados de un triángulo.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad trigonométrica, es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones (y las operaciones aritméticas involucradas). A continuación se muestran los diferentes casos de las identidades trigonométricas

Identidades trigonométricas fundamentales

1. $\csc(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$	2. $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
3. $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	4. $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\tan(x)}$
5. $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$	6. $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
7. $\sin(-x) = -\sin(x)$	8. $\cos(-x) = \cos(x)$
9. $\tan(-x) = -\tan(x)$	10. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
11. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	12. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$

Fórmulas de suma y resta de ángulos

1. $\sin(x+y) = \sin(x)\,\cos(y) + \cos(x)\,\sin(y)$	2. $\sin(x-y) = \sin(x)\,\cos(y) - \cos(x)\,\sin(y)$
3. $\cos(x+y) = \cos(x)\,\cos(y) - \sin(x)\,\sin(y)$	4. $\cos(x-y) = \cos(x)\,\cos(y) + \sin(x)\,\sin(y)$
5. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\,\tan(y)}$	6. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\,\tan(y)}$

Identidades de producto

1. $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$	2. $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
3. $\sin(x)\,\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$	4. $\sin(x)\,\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
5. $\sin(x)\,\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$	6. $\cos(x)\,\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

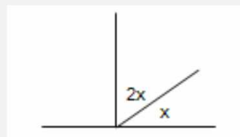
Fórmulas del doble de un ángulo

1.	$\sin(2x) = 2\sin(x)\,\cos(x)$	2.	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
3.	$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$	4.	$\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

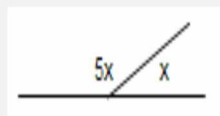
PROBLEMARIO II: TRIGONOMETRIA

1.- ¿Cuántos grados son 12º 48’ 30’’?

2.- Escribe 265,63º en la representación de grados, minutos y segundos?
3.- ¿Cuántos grados son 3 π rad?
4.- ¿Cuántos radianes son 45º?
5.- Si el complemento de ángulo *x* es *2x*, ¿Cuál es el valor de *x* en grados?



6.- Si el suplemento del ángulo *x* es *5x*, ¿Cuál es el valor de *x*?

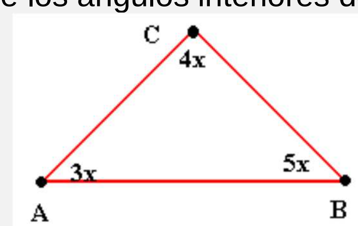


7.- Determínese los dos ángulos *x* e *y*, cuya suma es 90 y cuya diferencia es 10.

8.- Hállense dos ángulos complementarios tales que su diferencia sea 30°.

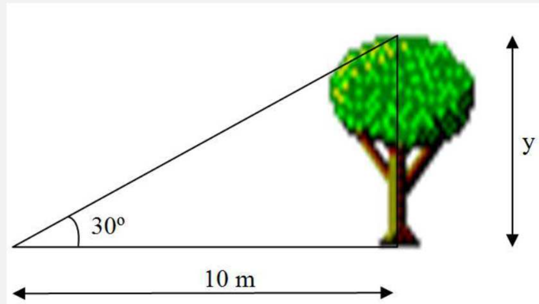
9.- Hállense dos ángulos suplementarios tales que el uno sea 20 mayor que el otro.

10.- ¿Cuánto miden cada uno de los ángulos interiores del siguiente triángulo?

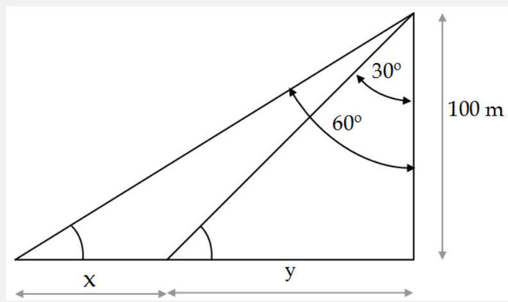


11.- Escribe la definición de bisectriz del triángulo.
12.- ¿Qué es la mediatriz de un triángulo?
13.- ¿Que es la mediana de un triángulo?

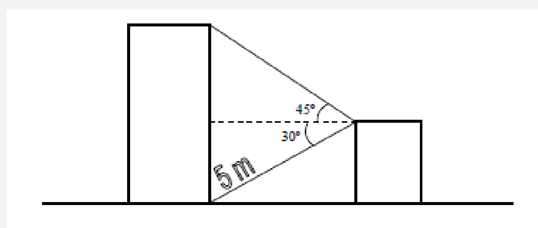
15.- Calcula la altura de un árbol que a una distancia de 10 m se ve bajo un ángulo de 30º.



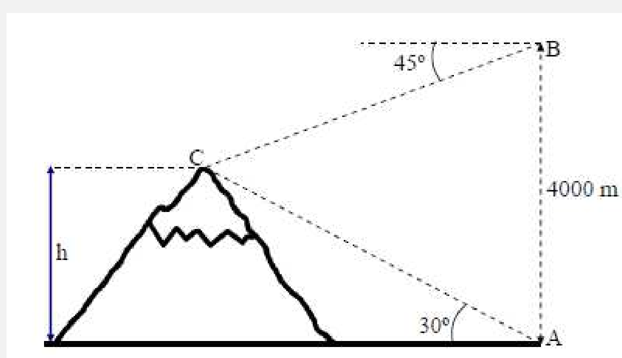
16.- Calcula x e y de la siguiente figura.



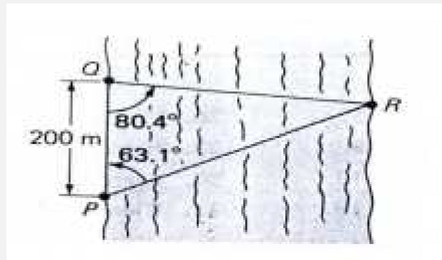
17.- Halla la altura del cuerpo más alto.



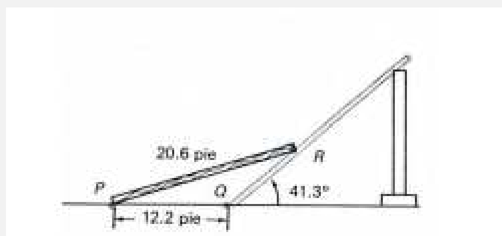
18.- Hallar la altura de la montaña.



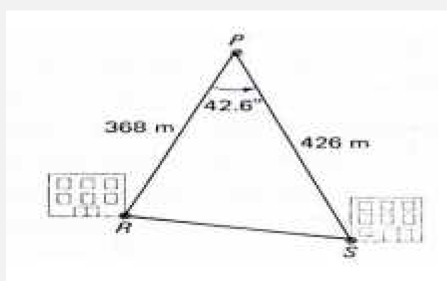
19.- Para determinar la distancia a través de un río recto, un topógrafo elige los puntos P y Q en la rivera, donde la distancia entre P y Q es 200m. En cada uno de los puntos se observa el punto R en la rivera opuesta. El ángulo que tiene lados PQ y PR mide 63.1° y el ángulo cuyos lados son PQ y QR mide 80.4°. ¿Cuál es la distancia a través del río?



20.- Una rampa está inclinada en un ángulo de 41.3° con respecto del suelo. Un extremo de una tabla de 20.6 pie de longitud se localiza en el suelo en un punto P que está a 12.2 pie de la base Q de la rampa, y el otro extremo reposa sobre la rampa en un Punto R. Determine la distancia desde el punto Q hacia arriba de la rampa hasta el punto R.



21.- Dos caminos rectos se cortan en un punto P y ahí forman un ángulo de 42. 6°. En un punto R sobre un camino está un edificio a 368m de P y en un punto S, en el otro camino está un edificio a 426 m de P. Determine la distancia directa de R a S.



22.- Demostrar las siguientes identidades trigonométricas.

a)

$$1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha$$

b) $$\frac{1+\sec\alpha}{1-\sec\alpha}=\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha-1}$$

c)

1. $cos\alpha\ tg\alpha = sen\alpha$
2. $sen\alpha\, sec\alpha = tg\alpha$
3. $sen\alpha\, cotg\alpha = cos\alpha$
4. $sen\alpha\, tg\alpha + cos\alpha = sec\alpha$
5. $cosec\alpha - sen\alpha = cotg\alpha\, cos\alpha$
6. $(sen\alpha + cos\alpha)^2 + (sen\alpha - cos\alpha)^2 = 2$

Programa educativo			
Unidad	1	**Asignatura:**	Funciones trigonométricas
Práctica N°:	3	**Nombre de la practica:**	Geometría Analítica
Nombre Integrante(s):			
Introducción:	El objeto de este capítulo es presentar algunos de los conceptos fundamentales de la Geometría analítica plana. Estos conceptos son fundamentales en el sentido de que constituyen la base del estudio de la Geometría analítica. En particular, se hará notar cómo se generalizan muchas de las nociones de la Geometría elemental por los métodos de la Geometría analítica. Esto se ilustrará con aplicaciones a las propiedades de las líneas rectas y de las figuras rectilíneas.		
Objetivo:	• Identificar las coordenadas de un punto en el plano y conocer su interpretación geométrica. • Reconocer y representar gráficamente lugares geométricos de puntos a distancia constante de los ejes. • Expresar en una tabla de valores y representar gráficamente las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas. • Estudiar analíticamente la incidencia entre puntos y rectas. • Estudiar las cónicas		

Marco Teórico:

Segmento rectilíneo dirigido. La porci6n de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos se llama segmento rectilíneo o simplemente segmento. Los dos puntos se llaman extremos del segmento.

Fig. 1

Así, en la figura 1, para la recta l, AB es un segmento cuyos extremos son A y B. La longitud del segmento AB se representa por $\overline{AB}$.

Desde el punto de vista de la Geometría elemental, las longitudes de los segmentos dirigidos, ***AB*** y ***BA***, son las mismas. En Geometría analítica, sin embargo, se hace una distinci6n entre 1os ***signos*** de estas longitudes. Así, especificamos, arbitrariamente, que un segmento dirigido en un sentido sería considerado de longitud ***positiva,*** mientras que otro, dirigido en sentido opuesto, sería considerado como un segmento de longitud ***negativa.*** De acuerdo con esto, si especificamos que el segmento dirigido ***AB*** tiene una longitud positiva, entonces el segmento dirigido ***BA*** tiene una longitud negativa, y escribimos.

$$\overline{AB} = -\overline{BA}\,.$$

La distancia entre dos puntos se define como el valor numérico o valor absoluto de la longitud del segmento rectilíneo que une esos dos puntos. Si representamos la distancia por *d*, podemos escribir

$$d = |\,\overline{P_1P_2}\,| = |x_2 - x_1|,$$

O también,

$$d = |\,\overline{P_2P_1}\,| = |x_1 - x_2|.$$

Sistema coordenado en el plano. En un sistema coordenado lineal, cuyos puntos están restringidos a estar sobre una recta, el eje, es evidente que estamos extremadamente limitados en nuestra investigaci6n analítica de propiedades geométricas. Así, por ejemplo, es imposible estudiar las propiedades de los puntos de una circunferencia. Para extender la utilidad del método analítico, consideraremos ahora un sistema coordenado en el cual un punto puede moverse en todas direcciones manteniéndose siempre en un plano. Este se llama sistema coordenado-bidimensional o plano, y es el sistema coordenado usado en la Geometría analítica plana.

El primer ejemplo que estudiaremos de uno de estos sistemas, y, además, el más importante, es el sistema coordenado rectangular, familiar a1 estudiante desde su estudio previo de Algebra y Trigonometría. Este sistema, indicado en la figura 4, consta de dos rectas dirigidas $X'X$ y $Y'Y$, llamadas ejes de coordenadas, perpendiculares entre sí. La recta $X'X$ se llama eje X; $Y'Y$ es el eje Y; y su punto de intersección O, el origen. Estos ejes coordenados dividen a1 plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes numerados tal como se indica en la figura 2. La direcci6n positiva del eje X es hacia la derecha; la direcci6n positiva del eje Y, hacia arriba.

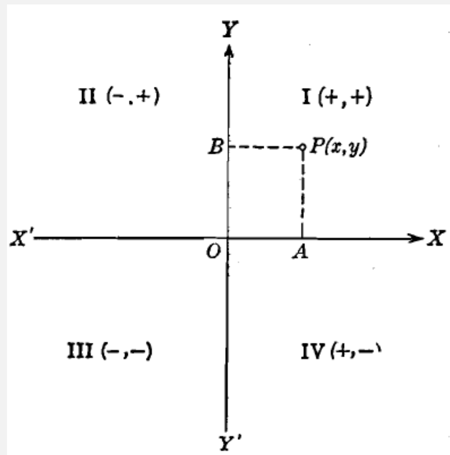


Figura 2

Distancia entre dos puntos dados. Sean $P_1 (x_1, y_1)$, y $P_2 (x_2 , y_2)$ dos puntos dados cualesquiera **(fig.** 3) . Vamos a determinar la distancia ***d*** entre P_1 y P_2, siendo $d = |\overline{P1P2}|$. Por ***P1P2*** tracemos las Perpendiculares ***P1 A*** y ***P2 D a*** ambos ejes coordenados, como se indica en la figura, y sea E **su** punto de intersecci6n. Consideremos el triángulo rectángulo ***P1 EP2***. Por el teorema de Pitágoras , tenemos :

$$d^2 = \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_2E}^2 + \overline{EP_1}^2.$$

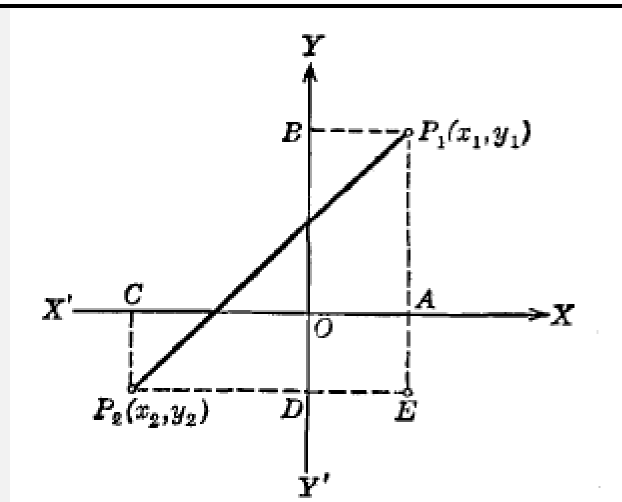


Figura 3

La distancia d entre dos puntos P_1 (x_1, y_1), y P_2 (x_2 , y_2) está dada por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

División de un segmento en una razón dada. Si P_1 (x_1, y_1), y P_2 (x_2 , y_2) son los extremos de un segmento P_1P_2 , las coordenada-s (x, y) de un punto P que divide a este segmento en la razón dada r = $\overline{P1P}$: $\overline{P2P}$ son.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \quad r \neq -1.$$

En el caso particular en que P es el punto medio del segmento dirigido P_1P_2, es ***r*** = 1 , de manera que 1os resultados anteriores ***se*** reducen a:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Pendiente de una recta. Dos rectas a1 cortarse forman dos pares de ángulos opuestos por el v6rtice (fig. 4). Por tanto, la expresi6n el ángulo comprendido entre dos rectas es ambigua, ya que tal ángulo puede ser el α o bien su suplemento el β. Para hacer una distinción entre estos ángulos, consideremos que las rectas están dirigidas y luego se establece lo siguiente.

Se llama ángulo de dos rectas dirigidas al formado por los dos lados que se alejan del vértice.

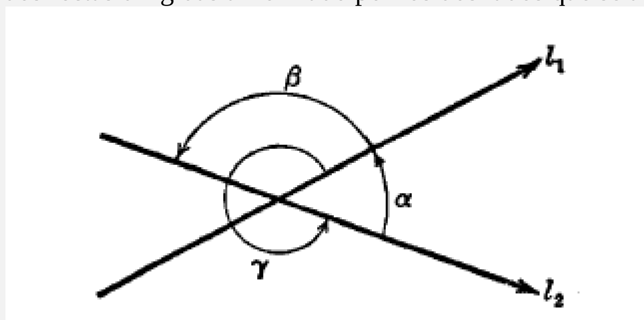


Figura 4

Se llama ***pendiente*** *o* ***coeficiente angular*** de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación.

La pendiente de una recta (fig. 5) se designa comúnmente por la letra m. Por tanto, podemos escribir:

$$m = \operatorname{tg} \alpha .$$

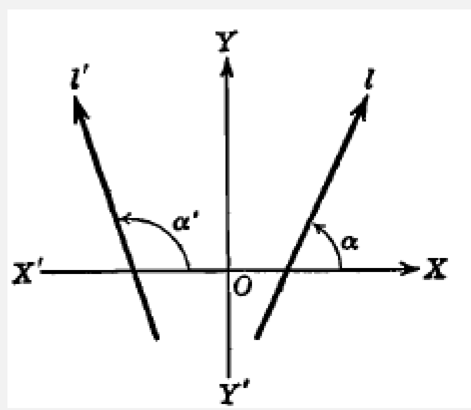


Figura 5

Si P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta es.

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2$$

La línea recta: Llamamos línea recta a1 lugar geométrico de 1os puntos tales que tornados ***dos puntos diferentes cualesquiera*** P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) del lugar.

Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada. Geométricamente, una recta queda perfectamente determinada por uno de sus puntos y su dirección. Analíticamente, la ecuaci6n de una recta puede estar perfectamente determinada si **se** conocen las coordenadas de uno de sus puntos y su ángulo de inclinaci6n (y, por tanto, su pendiente)

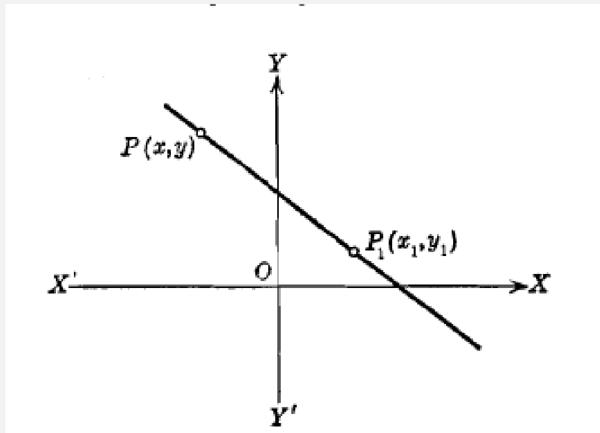


Figura 6

La recta que pasa por el punto dado $P_1 (x_1, y_1)$ y ***tiene la pendiente dada*** m, ***tiene por ecuación***, fig. (6)

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen. Consideremos una recta ***l*** (fig. 7) cuya pendiente es m y cuya ***ordenada en el origen.***

$$y = mx + b.$$

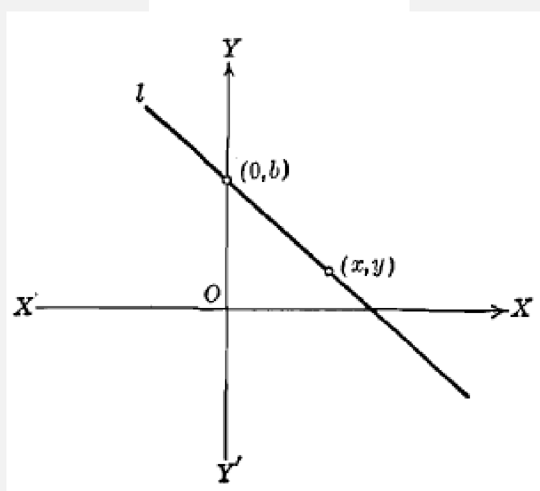


Figura 7

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $P_1 (x_1, y_1)$ **y** $P_2 (x_2, y_2)$ (fig. 8) ***tiene por ecuación.***

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1), \quad x_1 \neq x_2.$$

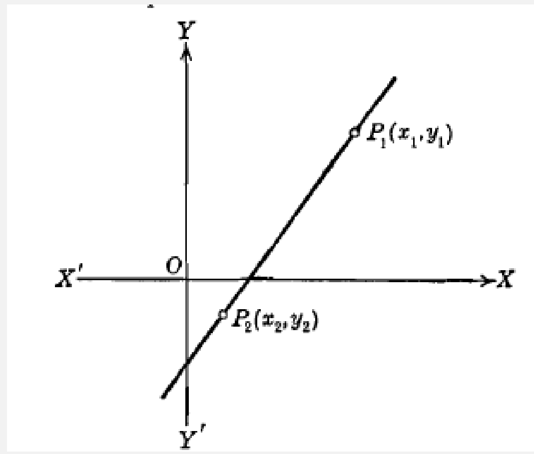


Figura 8

Ecuación simétrica de la recta, *sean a ≠ 0 y b ≠ 0 los segmentos de una recta determinada sobre los ejes X y Y (fig. 9), es decir sus intersecciones.* Entonces (a, 0) y (0, b) son dos puntos de la recta. La ecuación de la recta es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

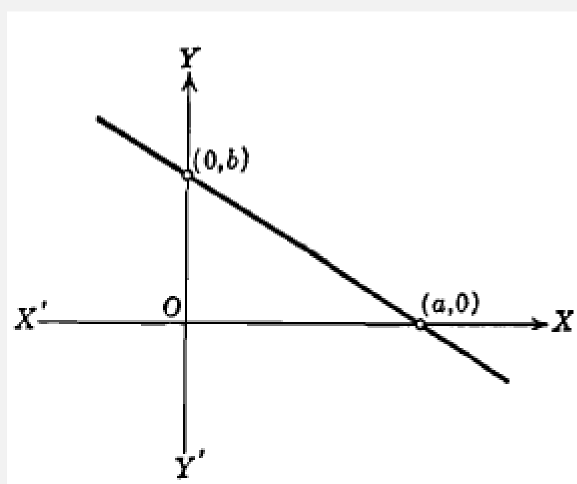


Figura 9

Forma general de la ecuación de una recta. En 1os artículos precedentes hemos visto que la ecuaci6n de una recta cualquiera, en el plano coordenado, es de la forma lineal.

$$Ax + By + C = 0\,,$$

en donde ya sea ***A*** o **B** debe ser diferente de cero y C puede o no ser igual a cero.

CASO I. B = **0.** Si B = **0,** entonces **A** # 0, y la ecuación general se reduce a la forma

$$x = -\frac{C}{A}\,.$$

CASO II. **B** # 0. Si B # 0, podemos dividir la ecuación general por B , y entonces por trasposición ***se*** reduce a la forma.

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}\,.$$

La distancia de d una recta AX + BY + C =0 a un punto dado $P_1(x_1, y_1)$ puede obtenerse sustituyendo las coordenadas del punto en el primer miembro de la forma de la forma normal de la ecuación de la ecuación de la recta. El valor esta dado entonces por.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA

Introducción. Después de la recta, la línea más familiar a1 estudiante es !a circunferencia, pues la conoce desde sus primeros estudios de Geometría elemental.

Ecuación de la circunferencia; forma ordinaria. La ecuación de la circunferencia se obtiene a partir de la siguiente

Definición: c*ircunferencia* es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

El punto fijo se llama ***centro*** de la circunferencia, y la distancia constante se llama ***radio.***

La circunferencia cuyo centro es el punto (h, k) fig.10 y cuyo radio es la constante r, *tiene por ecuación.*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

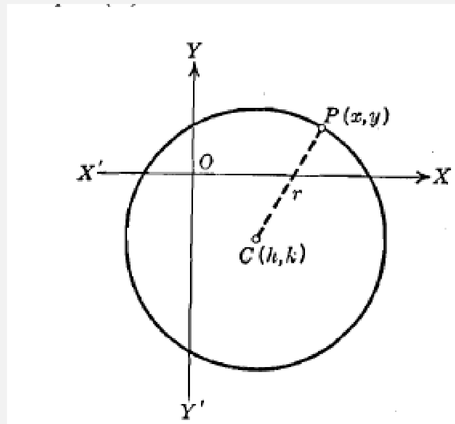


Figura 10

Para el caso particular en que el centro **C** está en el origen , ***h*** = ***k*** = **0,** se tiene la siguiente ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Parábola: Una *par**ábola (fig. 11)*** es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenecen a la recta.

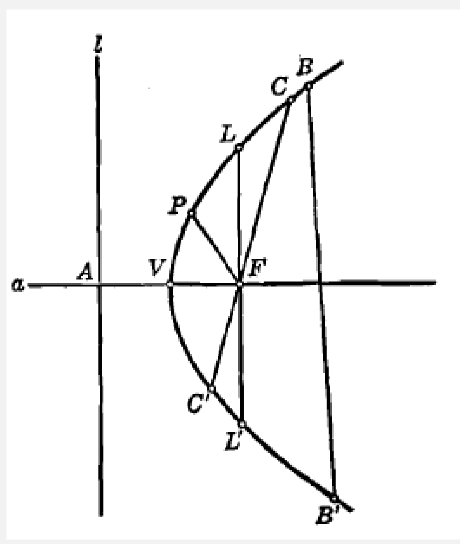


Figura 11.

Ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje un eje coordenado.

La ecuación de una parábola de vértice en el origen (fig. 12) y eje el eje X , es

$$y^2 = 4px ,$$

en donde el foco es el punto (p , 0) *y la ecuación de la directriz es x* = - p . *S i* p > 0, *la parábola se abre hacia la derecha; si* **p** < 0, *la parábola se abre hacia la izquierda.*

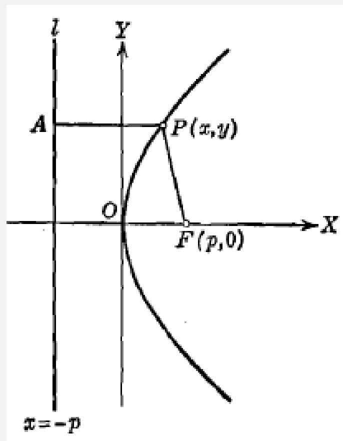


Figura 12

Si el eje de una parábola coincide con el eje (fig.13) Y, y el *vértice está en el origen, su ecuación es.*

$$x^2 = 4py ,$$

en *donde el foco es el punto* (0, p) , **y** *la ecuación de la directriz es* y = - p. *Si* p > 0, *la parábola se abre hacia arriba; si p* < 0, *la parábola se abre hacia abajo.*

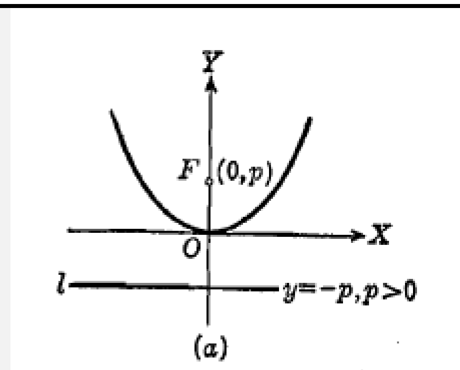


Figura 13

La ecuación de una parábola de vértice (h , k) y eje paralelo al eje X (fig. 14) , es de la forma

$$(y-k)^2 = 4p(x-h),$$

Siendo $|p|$ *la longitud del segmento del eje comprendido enlre el foco y el vértice*. *Si* p > 0, *la parábola se abre hacia la derecha; si* p < 0, *la parábola se abre hacia la izquierda.*

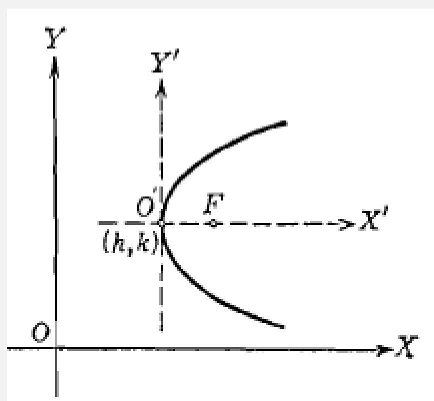


Figura 14

Si el vértice es el punto (h , k) y el eje de la parábola es paralelo al eje Y, *su ecuación es de la forma:*

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Elipse: Una ***elipse*** es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

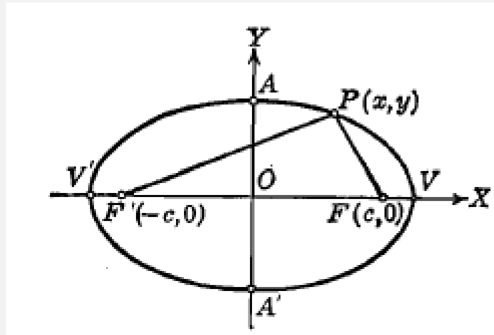


Figura 15

La ecuación de una elipse de centro en el origen (fig. 15), eje focal el eje X, distancia focal igual a 2c y *cantidad constante igual a* 2a es.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, *de manera que las coordenadas de los focos sean (0,* c) *y* (0, - c), *la ecuación de la elipse es.*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 .$$

Para cada elipse, **a** *es la longitud del semieje mayor,* **b** *la del semieje menor*, *y* a , b y c *están ligados por la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2 .$$

También, para cada elipse, la longitud de cada lado recto es

$$\frac{2b^2}{a}$$

Y la excentricidad **e** *está dada por la fórmula*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1 .$$

Ecuación de la elipse de centro *(h,* k) y ejes paralelos a 1os coordenados.

La ecuación de la elipse de centro el punto (h , k) *y eje focal paralelo a1 eje X (fig. 16) , está dada por la segunda forma ordinaria,*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 .$$

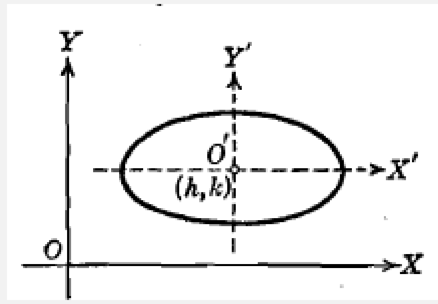


Figura 16

si el eje focal es paralelo al eje Y , su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 .$$

Para cada elipse, a *es la longitud del semieje mayor,* b *es la del semieje menor,* c *es la distancia del centro a cada foco* , *y* a , b **y** c *están ligadas por la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2 .$$

También , *para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos Es*

$$\frac{2b^2}{a}$$

y *la excentricidad* **c** *está dado por la relación*

$$c = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1 .$$

LA H I P E R B O L A: Una ***hipérbola*** es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados *focos*, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

La definición de la hipérbola excluye el caso en que el punto móvil se mueva sobre la recta que pasa por 10s focos a excepción del segmento comprendido entre ellos.

Primera ecuación ordinaria de la hipérbola.

La ecuación de la hipérbola **de** *centro en el origen* , *eje focal coincidente con el eje X* , y *focos los puntos* (c, *0) y* (- *c, 0), es*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Si el eje focal coincide con el ejes ***Y,*** *de manera que las coordenadas de los focos sean (0,* c) y *(0* , - c) , *entonces* la *ecuación es*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 .$$

Para cada hipérbola, **a** *es la longitud del semieje transverso*, **b** *la del semieje conjugado,* **c** *la distancia del centro a cada foco* , y **a , b , c** *están ligadas por la relación*

$$c^2 = a^2 + b^2 .$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es

$$\frac{2b^2}{a}$$

y *la excentricidad* **e** *está dada por la relación*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1 .$$

Problemas	**PROBLEMARIO III:** ÁNGULOS DE INCLINACIÓN DE DOS RECTAS Y PENDIENTE DE UNA RECTA

1. Dígase el ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas dirigidas: *a*) El eje X. *b*) El eje Y. *c*) Una recta paralela al eje X y dirigida hacia la derecha. *d*) Una recta paralela al eje X v dirigida hacia la izquierda.

2. Dígase la pendiente de cada una de las siguientes rectas dirigidas: *a*) El eje X. *b*) Una recta paralela al eje X y dirigida ya sea a la derecha o a la izquierda. *c*) La recta que pasa por el origen y biseca al cuadrante I. *d*) La recta que pasa por el origen y biseca al cuadrante II

3. Demostrar el teorema 4 del Artículo 8, empleando una figura en la cual el ángulo de inclinación α sea obtuso.

4. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(7, -3)$.

5. Los vértices de un triángulo son los puntos $(2, -2)$, $(-1, 4)$ y $(4, 5)$. Calcular la pendiente de cada uno de sus lados.

6. Demostrar, por medio de pendientes, que los puntos $(9, 2)$, $(11, 6)$, $(3, 5)$ y $(1, 1)$ son vértices de un paralelogramo.

7. Una recta de pendiente 3 pasa por el punto $(3, 2)$. La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

8. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $(2, 7)$ y por los puntos A y B. Si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6, ¿cuál es la abscisa de A y cuál la ordenada de B?

9. Tres de los vértices de un paralelogramo son $(-1, 4)$, $(1, -1)$ y $(6, 1)$. Si la ordenada del cuarto vértice es 6, ¿cuál es su abscisa?

PROBLEMARUI IV: DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DADOS, Y DIVISIÓN DE UN SEGMENTOS EN UNA RAZÓN DADA

1. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $(-3, -1)$, $(0, 3)$, $(3, 4)$, $(4, -1)$.

2. Demostrar que los puntos $(-2, -1)$, $(2, 2)$, $(5, -2)$, son los vértices de un triángulo isósceles.

3. Demostrar que los puntos $(2, -2)$, $(-8, 4)$, $(5, 3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar su área.

4. Demostrar que los tres puntos $(12, 1)$, $(-3, -2)$, $(2, -1)$ son colineales, es decir, que están sobre una misma línea recta.

5. Demostrar que los puntos $(0, 1)$, $(3, 5)$, $(7, 2)$, $(4, -2)$ son los vértices de un cuadrado.

6. Los vértices de un triángulo son $A(3, 8)$, $B(2, -1)$ y $C(6, -1)$. Si D es el punto medio del lado BC, calcular la longitud de la mediana AD.

7. Demostrar que los cuatro puntos $(1, 1)$, $(3, 5)$, $(11, 6)$, $(9, 2)$ son los vértices de un paralelogramo.

8. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, -4)$. *Sugestión.* Usese la segunda fórmula del Apéndice IA, 1.

9. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $(3, -2)$. Si la abscisa del otro extremo es 6 hallar su ordenada. (Dos soluciones.)

10. Determinar la ecuación algebraica que expresa el hecho de que el punto (x, y) equidista de los dos puntos $(-3, 5)$, $(7, -9)$.

11. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $(-2, 3)$ y $(6, -3)$.

12. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(2, 4)$ y $P_2(8, -4)$. Hallar el punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en dos partes tales que $\overline{P_2P} : \overline{PP_1} = -2$.

13. Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto $(7, 8)$, y su punto medio es $(4, 3)$. Hallar el otro extremo.

PROBLEMARIO V: PENDIENTE DE UNA RECTA

10. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos $(-2, 1)$, $(3, 4)$ y $(5, -2)$. Comprobar los resultados.

11. Demostrar que los puntos $(1, 1)$, $(5, 3)$, $(8, 0)$ y $(4, -2)$ son vértices de un paralelogramo, y hallar su ángulo obtuso.

12. Demostrar que los puntos $(1, 1)$, $(5, 3)$ y $(6, -4)$ son vértices de un triángulo isósceles, y hallar uno de los ángulos iguales.

13. Hallar los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $(2, 5)$, $(7, 3)$, $(6, 1)$ y $(0, 0)$. Comprobar los resultados.

14. Dos rectas se cortan formando un ángulo de $135°$. Sabiendo que la recta final tiene una pendiente de -3, calcular la pendiente de la recta inicial.

15. Dos rectas se cortan formando un ángulo de $45°$. La recta inicial pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(9, 7)$ y la recta final pasa por el punto $(3, 9)$ y por el punto A cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada de A.

16. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, -3)$, $B(3, 3)$ y $C(6, -1)$ empleando el seno del ángulo BAC. *Sugestión.* Ver Apéndice IC, 12.

17. Por medio de las pendientes demuéstrese que los tres puntos $(6, -2)$, $(2, 1)$ y $(-2, 4)$ son colineales.

18. Una recta pasa por los dos puntos $(-2, -3)$, $(4, 1)$. Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta, ¿cuál es su ordenada?

19. Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la recta que pasa por los dos puntos $(2, -1)$, $(7, 3)$.

20. Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la recta que pasa por el punto $(3, -1)$ y que tiene una pendiente igual a 4.

21. Demostrar que la recta que pasa por los dos puntos $(-2, 5)$ y $(4, 1)$ es perpendicular a la que pasa por los dos puntos $(-1, 1)$ y $(3, 7)$.

22. Una recta l_1 pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(-4, -6)$, y otra recta l_2 pasa por el punto $(-7, 1)$ y el punto A cuya ordenada es -6. Hallar la abscisa del punto A, sabiendo que l_1 es perpendicular a l_2.

23. Demostrar que los tres puntos $(2, 5)$, $(8, -1)$ y $(-2, 1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar sus ángulos agudos.

24. Demostrar que los cuatro puntos $(2, 4)$, $(7, 3)$, $(6, -2)$ y $(1, -1)$ son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares y se dividen mutuamente en partes iguales.

PROBLEMARIO VI: ECUACIÓN DE LA RECTA

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 5)$ y tiene de pendiente 2.

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-6, -3)$ y tiene un angulo de inclinación de $45°$.

3. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y cuya intercepción con el eje Y es -2.

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos $A(4, 2)$ y $B(-5, 7)$.

5. Los vértices de un cuadrilátero son $A(0, 0)$, $B(2, 4)$, $C(6, 7)$, $D(8, 0)$. Hallar las ecuaciones de sus lados.

6. Los segmentos que una recta determina sobre los ejes X y Y son 2 y -3, respectivamente. Hallar su ecuación.

7. Una recta pasa por los dos puntos $A(-3, -1)$ y $B(2, -6)$. Hallar su ecuación en la forma simétrica.

8. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $A(-1, 4)$. Hallar su ecuación en la forma simétrica.

9. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$.

10. Una recta pasa por el punto $A(7, 8)$ y es paralela a la recta $C(-2, 2)$ y $D(3, -4)$. Hallar su ecuación.

11. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$, y determina sobre el eje X el segmento -9.

12. Demostrar que los puntos $A(-5, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(4, 5)$ son colineales hallando la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos.

13. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta $5x + 3y - 15 = 0$.

Los ejercicios 14-21 se refieren al triángulo cuyos vértices son $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$.

14. Hallar las ecuaciones de los lados.

15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela al lado opuesto BC.

16. Hallar las ecuaciones de la rectas que pasan por el vértice B y trisecan al lado opuesto AC.

17. Hallar los vértices del triángulo formado por las rectas que pasan por los vértices A, B y C y son paralelas a los lados opuestos.

18. Hallar las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección.

19. Hallar las ecuaciones de las mediatrices de los lados y las coordenadas de su punto de intersección. Este punto se llama *circuncentro*.

20. Hallar las ecuaciones de las alturas y su punto de intersección. Este punto se llama *ortocentro*.

21. Hallar las coordenadas del pie de la altura correspondiente al lado AC. A partir de estas coordenadas hállese la longitud de la altura y luego el área del triángulo.

22. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4, y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$.

23. Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero son $3x - 8y + 36 = 0$, $x + y - 10 = 0$, $3x - 8y - 19 = 0$ y $x + y + 1 = 0$. Demostrar que la figura es un paralelogramo, y hallar las coordenadas de sus vértices.

PROBLEMARIO VII: *ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA FORMA ORDINARIA*

2. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2, 3)$ y $B(-4, 5)$. Hallar la ecuación de la curva.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(7, -6)$ y que pasa por el punto $A(2, 2)$.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, -4)$ y que es tangente al eje Y.

5. Una circunferencia tiene su centro en el punto $C(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. Hallar su ecuación.

6. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(-4, -1)$ y que es tangente a la recta $3x + 2y - 12 = 0$.

7. La ecuación de una circunferencia es $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$. Demostrar que el punto $A(2, -5)$ es interior a la circunferencia y que el punto $B(-4, 1)$ es exterior.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 24 = 0$, $2x + 7y + 9 = 0$.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x - 9y - 10 = 0$ y $2x - 5y + 2 = 0$.

10. Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ está sobre la recta cuya ecuación es $x - 7y + 25 = 0$. Hállese la longitud de la cuerda.

11. Hallar la ecuación de la mediatriz de la cuerda del ejercicio 10, y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia.

Los ejercicios 12-16 se refieren al triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0)$, $B(2, 9/4)$ y $C(5, 0)$.

12. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y que es tangente al lado BC.

13. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo.

18. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje Y y que pasa por los puntos $A(2, 2)$ y $B(6, -4)$.

19. Una circunferencia pasa por los puntos $A(-3, 3)$ y $B(1, 4)$ y su centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$. Hállese su ecuación.

20. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $9x + 2y + 13 = 0$, $3x + 8y - 47 = 0$ y $x - y - 1 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita.

21. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 50$ El punto medio de una cuerda de esta circunferencia es el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la cuerda.

22. La ecuación de una circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$. Hallar la ecuación de la tangente a este círculo en el punto $(6, 7)$.

23. La ecuación de una circunferencia es $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia que pasa por el punto $(3, 3)$. (Dos soluciones.)

24. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y es tangente a la recta $x - y - 4 = 0$ en el punto $B(3, -1)$.

PROBLEMARIO VIII: PARÁBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN

En cada uno de los ejercicios 1-4, hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto para la ecuación dada, y discutir el lugar geométrico correspondiente.

1. $y^2 = 12x$.
2. $x^2 = 12y$.
3. $y^2 + 8x = 0$.
4. $x^2 + 2y = 0$.
5. Deducir y discutir la ecuación ordinaria $x^2 = 4py$.
6. Hallar un procedimiento para obtener puntos de la parábola por medio de escuadras y compás, cuando se conocen el foco y la directriz.
7. Hallar un procedimiento para obtener puntos de la parábola por medio de escuadras y compás, si se dan el foco y el vértice.
8. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(3, 0)$.
9. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(0, -3)$.
10. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $y - 5 = 0$.

11. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta $x + 5 = 0$.
12. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.
13. Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$. Hallar su longitud.
14. Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $3x + 4y - 7 = 0$.
15. Demostrar que la longitud del radio vector de cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la parábola $y^2 = 4px$ es igual a $|x_1 + p|$.
16. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2 - 9x = 0$ cuya ordenada es igual a 6.
17. De un punto cualquiera de una parábola se traza una perpendicular al eje. Demostrar que esta perpendicular es media proporcional entre el lado recto y la porción del eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular.
18. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola $x^2 - 4y = 0$.
19. Los extremos del lado recto de una parábola cualquiera se unen con el punto de intersección del eje con la directriz. Demostrar que estas rectas son perpendiculares entre sí.
20. Una circunferencia cuyo centro es el punto $(4, -1)$ pasa por el foco de la parábola $x^2 + 16y = 0$. Demostrar que es tangente a la directriz de la parábola.

PROBLEMARIO IX: PARÁBOLA CONCENTRO (h,k)

8. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos (3, 3) y (3, 1), respectivamente. Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

9. La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto (4, − 3). Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

[illegible] La directriz de una parábola es la recta $x + 5 = 0$, y su vértice es el punto (0, 3). Hallar la ecuación de la parábola por dos métodos diferentes.

En cada uno de los ejercicios 11-15, redúzcase la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, y la longitud del lado recto.

11. $4y^2 - 48x - 20y = 71$.

12. $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$.

13. $y^2 + 4x = 7$.

14. $4x^2 + 48y + 12x = 159$.

15. $y = ax^2 + bx + c$.

16. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 56 trasladando los ejes coordenados.

17. Resolver el ejercicio 14 trasladando los ejes coordenados.

18. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A = E = F = 0$ y $C \neq 0$, $D \neq 0$.

19. Resolver el ejemplo 3 del Artículo 56 tomando la ecuación en la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

20. Hallar las coordenadas del foco y el vértice, las ecuaciones de la directriz y el eje, y la longitud del lado recto de la parábola del ejemplo 3 del Artículo 56.

21. Determinar la ecuación de la familia de parábolas que tienen un foco común (3, 4) y un eje común paralelo al eje Y.

22. La ecuación de una familia de parábolas es $y = 4x^2 + 4x + c$. Discutir cómo varía el lugar geométrico cuando se hace variar el valor del parámetro c.

23. La ecuación de una familia de parábolas es $y = ax^2 + bx$. Hállese la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos (2, 8) y (− 1, 5).

[illegible] Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los tres puntos (0, 0), (8, − 4) y (3, 1).

[illegible]. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto (4, − 1), eje la recta $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto (3, − 3).

PROBLEMARIO X: ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN

En cada uno de los ejercicios 6-9, hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada uno de sus lados rectos de la elipse correspondiente. Trazar y discutir el lugar geométrico.

6. $9x^2 + 4y^2 = 36$.

7. $4x^2 + 9y^2 = 36$.

8. $16x^2 + 25y^2 = 400$.

9. $x^2 + 3y^2 = 6$.

10. Hallar la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4, 0)$, $(-4, 0)$, y cuyos focos son los puntos $(3, 0)$, $(-3, 0)$.

11. Los vértices de una elipse son los puntos $(0, 6)$, $(0, -6)$, y sus focos son los puntos $(0, 4)$, $(0, -4)$. Hallar su ecuación.

12. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos $(2, 0)$, $(-2, 0)$, y su excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$.

13. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 0)$, $(-3, 0)$, y la longitud de uno cualquiera de sus lados rectos es igual a 9. Hallar la ecuación de la elipse.

14. Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices en el punto $(0, -7)$ y pasa por el punto $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right)$.

15. Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por los puntos $(\sqrt{6}, -1)$ y $(2, \sqrt{2})$.

16. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$, tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje X y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

17. Demostrar que la longitud del eje menor de una elipse es media proporcional entre las longitudes de su eje mayor y su lado recto.

18. Demostrar que la longitud del semieje menor de una elipse es media proporcional entre los dos segmentos del eje mayor determinados por uno de los focos.

19. Demostrar que si dos elipses tienen la misma excentricidad, las longitudes de sus semiejes mayor y menor son proporcionales.

20. Si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, demuéstrese que sus radios vectores son $a + ex_1$ y $a - ex_1$. Establecer el significado de la suma de estas longitudes.

21. Hallar los radios vectores del punto $(3, \frac{7}{4})$ que está sobre la elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$.

PROBLEMARIO XI: *ELIPSE CON CENTRO (h,k)*

6. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, 1)$ y $(7, 1)$ y su excentricidad es $\frac{1}{3}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y las longitudes de sus ejes mayor y menor y de cada lado recto.

7. Los focos de una elipse son los puntos $(-4, -2)$ y $(-4, -6)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hállese la ecuación de la elipse y su excentricidad.

8. Los vértices de una elipse son los puntos $(1, -6)$ y $(9, -6)$ y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

9. Los focos de una elipse son los puntos $(3, 8)$ y $(3, 2)$, y la longitud de su eje menor es 8. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad.

10. El centro de una elipse es el punto $(-2, -1)$ y uno de sus vértices es el punto $(3, -1)$. Si la longitud de cada lado recto es 4, hállese la ecuación de la elipse, su excentricidad y las coordenadas de sus focos.

11. El centro de una elipse es el punto $(2, -4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado del centro son los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$, respectivamente. Hallar la ecuación de la elipse, su excentricidad, la longitud de su eje menor y la de cada lado recto.

12. Discutir la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando A y C son ambos positivos y $D = E = 0$.

En cada uno de los ejercicios 13-16, reducir la ecuación dada a la segunda forma ordinaria de la ecuación de una elipse, y determínense las coordenadas del centro, vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, y la de cada lado recto y la excentricidad.

13. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0.$
14. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0.$
15. $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0.$
16. $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$

PROBLEMARIO XII: HIPERBOLA

En cada uno de los ejercicios 6-9, para la ecuación dada de la hipérbola, hállense las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud de cada lado recto. Trácese y discútase el lugar geométrico.

6. $9x^2 - 4y^2 = 36$.

7. $4x^2 - 9y^2 = 36$.

8. $9y^2 - 4x^2 = 36$.

9. $x^2 - 4y^2 = 4$.

10. Los vértices de una hiperbola son los puntos $V(2, 0)$, $V'(-2, 0)$, y sus focos son los puntos $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$. Hallar su ecuación y su excentricidad.

11. El centro de una hipérbola está en el origen, y su eje transverso está sobre el eje Y. Si un foco es el punto $(0, 5)$ y la excentricidad es igual a 3, hállese la ecuación de la hipérbola y la longitud de cada lado recto.

12. Los extremos del eje conjugado de una hipérbola son los puntos $(0, 3)$ y $(0, -3)$, y la longitud de cada lado recto es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola y su excentricidad.

13. Los vértices de una hipérbola son $(0, 4)$, $(0, -4)$, y su excentricidad es igual a $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.

14. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transverso sobre el eje X. Hallar su ecuación sabiendo que su excentricidad es $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ y que la curva pasa por el punto $(2, 1)$.

15. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje conjugado está sobre el eje X. La longitud de cada lado recto es $\frac{3}{2}$, y la hipérbola pasa por el punto $(-1, 2)$. Hallar su ecuación.

16. Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(7, 6)$, tiene su centro en el origen y el eje transverso coincide con el eje X.

En cada uno de los ejercicios 17-19, usando la definición de hipérbola, hallar la ecuación de dicha curva a partir de los datos dados. Mediante un cambio de coordenadas, poner la ecuación en la primera forma ordinaria.

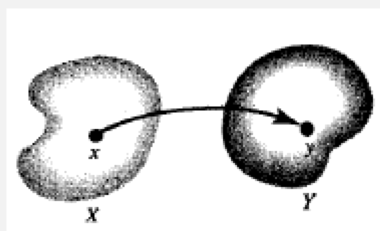
17. Focos $(-7, 3)$, $(-1, 3)$; longitud del eje transverso $= 4$.

18. Vértices $(1, 4)$, $(5, 4)$; longitud del lado recto $= 5$.

19. Vértices $(3, 4)$, $(3, -2)$; excentricidad $= 2$.

Programa educativo

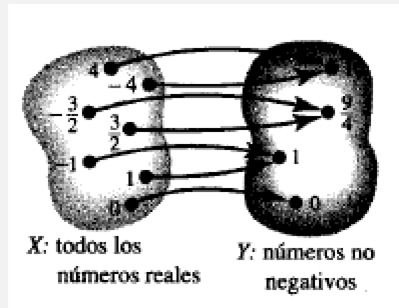
Unidad	1	**Asignatura:**	Funciones Matemáticas
Práctica N°:	3	**Nombre de la practica:**	Funciones
Nombre Integrante(s):			

Introducción:	Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto **X** de números reales **x** a un conjunto **Y** de números reales y, donde el número y es único para cada valor específico de **x**.
Objetivo:	El alumno modelará matemáticamente con funciones problemas de su entorno para describir su comportamiento.
Marco Teórico:	Con frecuencia, en las aplicaciones prácticas el valor de una variable dependiente del valor de otra, por ejemplo, el salario de una persona puede depender del número de horas que trabaje; la producción total de una fábrica puede depender del número de máquinas que se utilicen; la distancia recorrida por un objeto puede depender del tiempo transcurrido desde que salió desde un punto específico; el volumen del espacio ocupado por un gas a presión constante depende de su temperatura; la resistencia de un cable eléctrico de longitud de longitud fija depende de su diámetro, etc. La relación entre este tipo de cantidades suele expresarse mediante una función. Para fines exclusivos de este texto, las cantidades involucradas son números reales.En la figura 17, se muestra la correspondencia de una función.  Figura 17 Para denotar funciones se utilizan símbolos como *f, g, y h.* El conjunto X de los números reales es el dominio de la función y el conjunto Y de números reales asignados a los valores de x en X es el contradominio de la función. El dominio y el contradominio suelen expresarse en la notación de intervalos. Por ejemplo: Con notación de intervalos, el dominio y contradominio de la función definida por la ecuación $$y = x^2$$

es (--∞, +∞) y el contradominio [0, +∞)

Tabla 1

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
4	16
0	0
-1	1
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-4	16



Operaciones con funciones y tipos de funciones.

Se pueden formar nuevas funciones a partir de funciones dadas mediante adición, sustracción, multiplicación y división de sus valores. De acuerdo con esto, las nuevas funciones se conocen como las sumas, diferencias, producto y cociente de las funciones originales.

Tabla 1 Definición de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones

Dadas las dos funciones f y g:

(i) su **suma,** denotada por $f + g$, es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(ii) su **diferencia,** denotada por $f - g$, es la función definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

(iii) su **producto,** denotado por $f \cdot g$, es la función definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

(iv) su **cociente,** denotado por f/g, es la función definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \qquad g(x) \neq 0$$

En cada caso, el *dominio* de la función resultante consta de aquellos valores de x comunes a los dominios de f y g, con el requerimiento adicional en el caso (iv) de que se excluyan los valores de x para los cuales $g(x) = 0$.

Otra operación entre funciones es la obtención de la función compuesta de dos funciones dadas, (fig. 18).

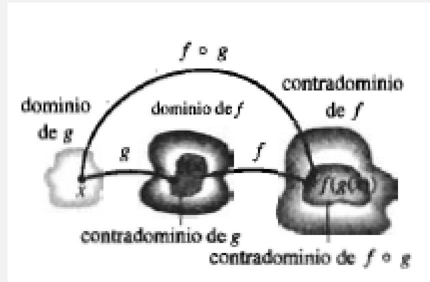


Figura 18

Tabla 2 Definición de función compuesta

Dadas las dos funciones f y g, la **función compuesta**, denotada por $f \circ g$, está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números x del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

Función **par** y función **impar:** Una función par es aquella cuya gráfica es simétrica con respecto al eje y, y una función impar es aquella cuya gráfica es simétrica con respecto al origen. A continuación en la tabla 3 se presenta la definición formal de estas funciones.

Tabla 3 Definición de función par y función impar

(i) Una función f es una **función par** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = f(x)$.

(ii) Una función f es una **función impar** si para cada x del dominio de f, $f(-x) = -f(x)$.

En los dos incisos (i) y (ii) se sobrentiende que $-x$ está en el dominio de f siempre que x lo esté.

PROBLEMARIO XIII: DIFERENCIA, PRODUCTO Y COCIENTE DE DOS FUNCIONES

En los ejercicios 1 a 10, defina las siguientes funciones y determine el dominio de la función resultante: a) *f + g; b) f – g; c) f . g; d) f/g; e) g/f.*

1. $f(x) = x - 5;\ g(x) = x^2 - 1$

2. $f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = x^2 + 1$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1};\ g(x) = \dfrac{1}{x}$

4. $f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = 4 - x^2$

5. $f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = x^2 - 1$

6. $f(x) = |x|;\ g(x) = |x - 3|$

7. $f(x) = x^2 + 1;\ g(x) = 3x - 2$

8. $f(x) = \sqrt{x - 4};\ g(x) = x^2 - 4$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x+1};\ g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

10. $f(x) = x^2;\ g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

PROBLEMARIO XIV: FUNCIONES PAR E IMPAR

En los ejercicios 33 a 38, trace en la graficadora la gráfica de la función y a partir de la gráfica conjeture si la función es par o impar o de ninguno de estos tipos. Después confirme su conjetura analíticamente.

33. **(a)** $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$ **(b)** $g(x) = 5x^5 + 1$

34. **(a)** $f(x) = x^2 + 2x + 2$ **(b)** $g(x) = x^6 - 1$

35. **(a)** $f(x) = 5x^3 - 7x$ **(b)** $g(x) = |x|$

36. **(a)** $f(x) = 4x^5 + 3x^3$ **(b)** $g(x) = x^3 + 1$

37. **(a)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **(b)** $g(x) = 5x^4 - 4$

38. **(a)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **(b)** $g(x) = 2|x| + 3$

Funciones con modelos matemáticos.

En las aplicaciones del cálculo, se necesita expresar una situación del mundo real en términos de una relación funcional, denominada **modelo matemático** de la situación. En este apartado está destinado a proporcionarle práctica en la obtención de funciones como modelos matemáticos y al mismo tiempo para mostrarle algunas de las aplicaciones que encontrará posteriormente.

Aunque no siempre se emplea un método específico para obtener un madelo matemático, a continuación se le presentan algunos pasos que le proporcionarán un procedimiento posible que deberá seguir.

Tabla 4 Sugerencias para resolver problemas que implican una función como modelo matemático

1. Lea el problema cuidadosamente hasta que lo entienda. Para comprenderlo, con frecuencia es útil inventar un ejemplo específico que involucre una situación similar en la que las cantidades son conocidas. Otra ayuda es dibujar un diagrama si es posible, como se muestra en los ejemplos 4 y 5.
2. Determine las cantidades conocidas y desconocidas. Utilice un símbolo, digamos x, para la variable independiente y un símbolo, por decir f, para la función que se obtendrá; entonces $f(x)$ simbolizará el valor de función. Como x y $f(x)$ son símbolos para representar números, sus definiciones deben indicar este hecho. Por ejemplo, si la variable independiente representa longitud y la longitud se mide en pies, entonces si x es el símbolo para la variable, x debe definirse como el número de pies de la longitud o, equivalentemente, x pies es la longitud.
3. Anote cualquier hecho numérico conocido acerca de la variable y del valor de la función.
4. A partir de la información del paso 3, determine dos expresiones algebraicas en términos de la variable y del valor de la función. De estas dos expresiones forme una ecuación que defina la función. Ahora ya se tiene una función como modelo matemático del problema.
5. A fin de terminar el problema una vez que se ha aplicado el modelo matemático, para determinar las cantidades desconocidas, *escriba una conclusión*, la cual consista de una o más oraciones, que respondan a las preguntas del problema. Asegúrese de que la conclusión contenga las unidades de medición correctas.

PROBLEMARIO XV: FUNCIONES CON MADELOS MATEMÁTICOS

En cada ejercicio, obtenga una función como modelo matemático de una situación particular. Defina la variable independiente y el valor de la función como un número e indique las unidades de medición.

4. Para una cuerda que vibra, el número de vibraciones es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda, y una cuerda particular vibra 864 veces por segundo bajo una tensión de 24 kg. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el número de vibraciones como una función de la tensión. **(b)** Determine el número de vibraciones por segundo bajo una tensión de 6 kg.

5. Los cargos de embarques se basan frecuentemente en una fórmula que proporciona el cargo mínimo por libra conforme el cargamento se incrementa. Suponga que los cargos de embarques son los siguientes: \$2.20 por libra si el peso no excede 50 lb; \$2.10 por libra si el peso es mayor que 50 lb pero no excede 200 lb; \$2.05 por libra si el peso es mayor que 200 lb. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el costo total de un embarque como una función de su peso. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el costo total de un embarque de 50 lb; 51 lb; 52 lb; 53 lb; 200 lb; 202 lb; 204 lb y 206 lb.

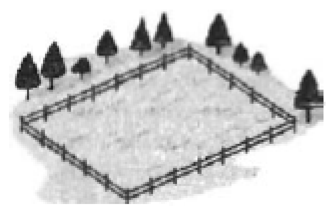
6. En 1995, el porte de correo para una carta de primera clase se calculó como sigue: 32 centavos para la primera onza o menos, y 23 centavos por onza (o fracción de onza) adicional para las siguientes 10 oz. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el porte de correo para una carta de primera clase, que no pese más de 11 oz, como una función de su peso. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el porte de correo para una carta de primera clase que pesa 1.6 oz, 2 oz, 2.1 oz, 8.4 oz y 11 oz.

7. El costo de una llamada telefónica desde Mendocino a San Francisco durante el horario de oficinas es 40 centavos por el primer minuto y 30 centavos por cada minuto o fracción adicional. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el costo de una llamada telefónica, que no dura más de 5 min, como una función de la duración de la llamada. **(b)** Dibuje la gráfica de la función del inciso (a). **(c)** Determine el costo de una llamada telefónica que dura 0.5 min, 2 min, 2.5 min, 3 min, 3.5 min y 5 min.

11. El área de la superficie de una esfera es función de su radio. Si el radio de una esfera mide r centímetros y $A(r)$ centímetros cuadrados es el área de la superficie, entonces $A(r) = 4\pi r^2$. Suponga que un globo mantiene la forma de una esfera conforme se infla de modo que el radio cambia a una tasa constante de 3 cm/s. Si $f(t)$ centímetros es el radio del globo después de t segundos, haga lo siguiente: **(a)** calcule $(A \circ f)(t)$ e interprete su resultado. **(b)** Determine el área de la superficie del globo después de 4 s.

12. El volumen de una esfera es función de su radio. Si el radio de una esfera mide r pies y $V(r)$ pies cúbicos es su volumen, entonces $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Suponga que una bola de nieve de 2 pie de radio comenzó a derretirse a una tasa constante de 4.5 pulg/min. Si $f(t)$ pies es el radio de la bola de nieve después de t minutos, haga lo siguiente: **(a)** calcule $(V \circ f)(t)$ e interprete su resultado. **(b)** Determine el volumen de la bola de nieve después de 3 min.

13. A un campo de forma rectangular se le colocaron 240 m de cerca. **(a)** Encuentre un modelo matemático que exprese el área del terreno como una función de su longitud. **(b)** ¿Cuál es el dominio de la función del inciso (a)? **(c)** Al trazar la gráfica de la función del inciso (a) en la graficadora, estime, con aproximación de metros, las dimensiones del campo rectangular de mayor área que pueda cercarse con 240 m.



.

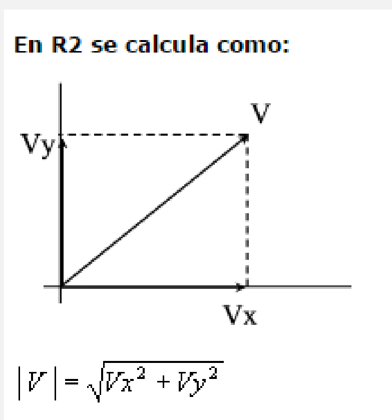
Programa educativo			
Unidad	1	**Asignatura:**	Funciones Matemáticas
Práctica N°:	5	**Nombre de la práctica:**	Algebra vectorial
Nombre Integrante(s):			
Introducción:	Los vectores es uno de los conocimientos de las matemáticas que provienen de la física. En la que se distingue entre magnitudes escalares y vectoriales. Por el contrario, se consideran magnitudes vectoriales aquellas en las que, de alguna manera, influyen la dirección y el sentido en el que se aplican		
Objetivo:	Analizar, interpretar y dar soluciones a problemas de álgebra vectorial para contribuir a la interpretación y solución de problemas de su entorno.		
Marco Teórico:	**Vectores en R^2 Y R^3** **Magnitudes escalares y vectoriales:** Hay magnitudes que quedan determinadas dando un solo número real. Por ejemplo: la longitud de una regla, la masa de un cuerpo o el tiempo transcurrido entre dos sucesos. Tales magnitudes se llaman escalares, y pueden ser representadas sobre la recta real mediante un número que indica su medida. Otros ejemplos de escalares son: la densidad, el volumen, el trabajo, la potencia. Para otras magnitudes, en cambio, no es suficiente dar un número para determinarlas. Para la velocidad en un punto, por ejemplo, no basta conocer su intensidad, sino que hace falta conocer además la dirección y el sentido con que el punto se mueve. La dirección viene dada por una recta, de manera que todas las rectas paralelas representan la misma dirección. Otras rectas no paralelas tienen direcciones diferentes. Cada dirección tiene dos sentidos, determinados por las dos orientaciones posibles sobre la recta. Lo mismo que con la velocidad ocurre con la fuerza, con el campo eléctrico, etc. Son magnitudes en las que su efecto depende no sólo de la intensidad sino también de la dirección y sentido en que actúan. Estas magnitudes en las que hay que distinguir su intensidad (que es una magnitud escalar), su dirección y su sentido, se llaman magnitudes vectoriales. Otros ejemplos son: la aceleración, la cantidad de movimiento, el campo magnético, el flujo de calor o de materia, etc. Las magnitudes vectoriales ya no se pueden representar, como los escalares, por puntos sobre		

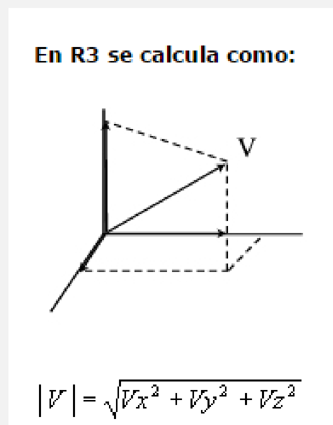
una recta. Hay que tomar segmentos de una dada longitud (indicadora de su intensidad) a partir de un punto fijo, los cuales tengan la dirección y sentido correspondientes.

Vectores.

Un segmento de recta queda determinado por sus dos puntos extremos. Cuando esos puntos están dados en un cierto orden, se dice que el segmento está orientado. Se llama vector a todo segmento orientado. El primer punto es el origen y el segundo, el extremo del vector. La recta que contiene al vector determina su dirección; la orientación sobre la recta, definida desde el origen hasta el extremo, determina su sentido. Todos los vectores situados sobre una misma recta o sobre rectas paralelas tienen la misma dirección. Sobre cada recta hay dos sentidos opuestos. Se llama módulo de un vector a la longitud del segmento que lo representa, que es proporcional a la intensidad de la magnitud representada. El módulo es una cantidad escalar siempre positiva.

El módulo de un vector representa su longitud. Se calcula como la raíz cuadrada de la suma de sus componentes elevadas al cuadrado.





Cuando el módulo de un vector es nulo, el segmento se reduce a un punto y no puede hablarse de vector pues carece de dirección y sentido. Sin embargo, se conviene en definir el vector nulo como aquél de módulo cero.

Para indicar un vector se usa con frecuencia una flecha encima: $\vec{A}$ $\overrightarrow{OP}$

Dos vectores se dicen iguales cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Los vectores **A y B** de la figura 19, ubicados sobre rectas paralelas, son iguales, **A=B**. Con este criterio de igualdad, todos los vectores pueden ser trasladados a un mismo origen. Dos vectores se dicen opuestos cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos. Los vectores **A y C** son opuestos y se indican *A=-C.*

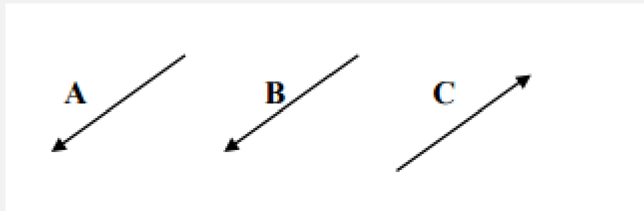


Figura 19

Adición y sustracción de vectores

Para sumar dos vectores **A y B,** figura 20 ya sea en el plano como en el espacio tridimensional, se representa **B** a continuación de **A**, es decir, el origen de B se hace coincidir con el extremo de **A**. El vector **A+B** tiene su origen en el origen de **A** y su extremo en el extremo de **B**. Se llega al mismo resultado representando ambos vectores con el mismo origen **O**, trazando el paralelogramo sobre **A** y **B** y definiendo la suma como la diagonal que pasa por **O**.

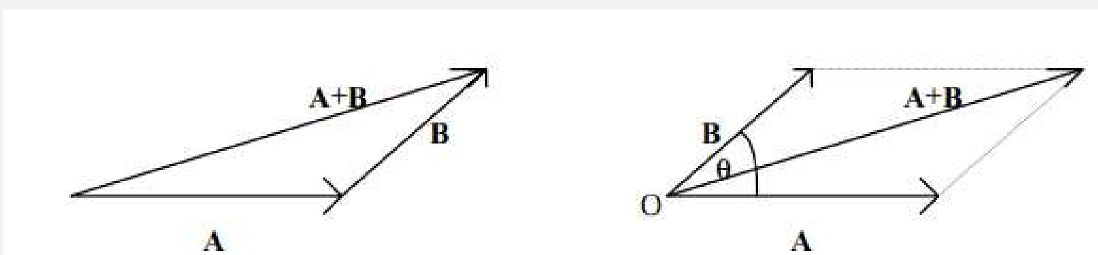


Figura 20

La definición siguiente proporciona el método para sumar dos vectores.

La **suma** de los vectores A = (a_1, a_2), y B = (b_1, b_2) es el vector **A + B** definido por

$$\mathbf{A+B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)}$$

La **diferencia (fig. 21)** de los vectores A = (a_1, a_2), y B = (b_1, b_2) es el vector **A - B** definido por

$$\mathbf{A-B = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)}$$

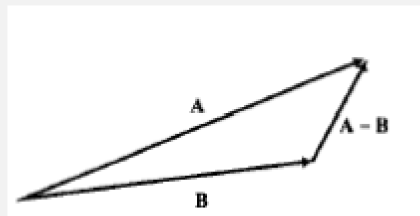


Figura 21

Definición del producto de un vector y un escalar:

Si c es un escalar y A es el vector (a_1, a_2), entonces el producto de c y A, denotado por cA, es el vector definido por:

$cA = c(a_1,\ a_2)$

= (ca_1, ca_2)

Ejemplo: Si A = (4, -5), figura 22, entonces 3A = 3(4, 5)

= (12, -15)

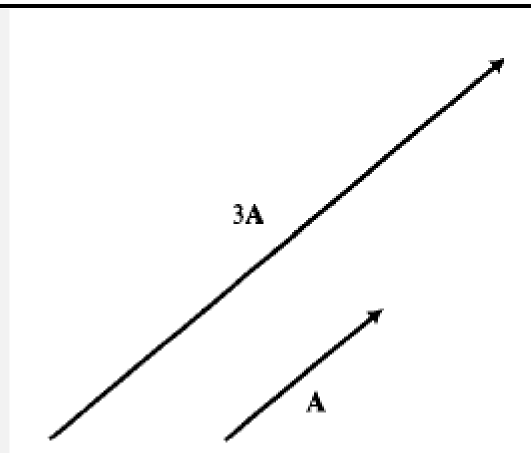


Figura 2l

El teorema siguiente proporciona las leyes que satisfacen las operaciones de adición vectorial y multiplicación por un escalar de vectores de V_2.

Teorema

Si **A**, **B** y **C** son tres vectores cualesquiera de V_2, y c y d son dos escalares cualesquiera, entonces la adición vectorial y la multiplicación por un escalar satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (ley conmutativa)
(ii) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (ley asociativa)
(iii) Existe un vector $\mathbf{0}$ en V_2 para el cual $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ (existencia del *idéntico aditivo*)
(iv) Existe un vector $-\mathbf{A}$ en V_2 tal que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ (existencia del *inverso aditivo* o *negativo*)
(v) $(cd)\mathbf{A} = c(d\mathbf{A})$ (ley asociativa)
(vi) $c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$ (ley distributiva)
(vii) $(c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$ (ley distributiva)
(viii) $1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ (existencia del idéntico multiplicativo escalar)

Vector unitario:

Sea el vector A = $a_1i + a_2j$ es diferente del vector cero, entonces el vector U que tiene la misma dirección y el mismo sentido de A está definido por

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|}\mathbf{j}$$

Ejemplo: Dados **A = 3i + j y B = -2i + 4j,** obtenga el vector unitario que tenga la misma dirección de A – B.

Solución

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) - (-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$$
$$= 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

Así,

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\| = \sqrt{5^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{34}$$

El vector unitario requerido es:

$$\mathbf{U} = \frac{5}{\sqrt{34}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{34}}\mathbf{j}$$

Producto punto:

Hasta este momento se han definido las siguientes operaciones con vectores: adición, sustracción, y multiplicación de un vector por un escalar. El resultado de cada una de estas operaciones y multiplicaciones de un vector por un escalar. El resultado de cada una de estas operaciones es un vector. A continuación se definirá la operación en la que se multiplicarán dos vectores, denominada producto punto, la cual tiene como resultado un escalar y no un vector.

El **producto punto** de dos vectores **A** y **B**, denotado por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, se define como sigue:

(i) Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ son dos vectores de V_2, entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2$$

(ii) Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son dos vectores de V_3, entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Los productos puntos que contienen los vectores unitarios **i, j,** y **k** son útiles y pueden verificar fácilmente:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \qquad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

El teorema siguiente afirma que el producto punto es conmutativo y que se distribuye con respecto a la adición vectorial

Teorema

Si **A**, **B** y **C** son tres vectores cualesquiera de V_2 o V_3, entonces

(i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (ley conmutativa)

(ii) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ (ley distributiva)

Producto cruz:

El producto cruz, operación vectorial para vectores de V_3, tiene aplicaciones en la geometría, el movimiento planetario, la electricidad, el magnetismo y la mecánica. A y B son dos vectores no paralelos, entonces las representaciones de los dos vectores con el mismo punto inicial determinan un plano como se indica en la figura 21 El resultado del producto cruz de A y B es un vector cuyas representaciones son perpendiculares a este plano.

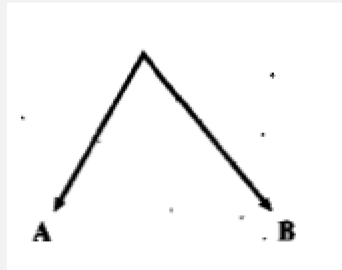


Figura 22

Definición de producto cruz

Si $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces el **producto cruz** de **A** y **B**, denotado por $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, está dado por

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

Observe que esta definición trata sólo con vectores de V_3. No existe el producto cruz para vectores de V_2.- El producto cruz también se denomina producto vectorial. La operación para obtener el producto cruz se llama multiplicación cruz o multiplicación vectorial.

Al aplicar la definición de producto cruz, a pares de vectores **i, j,** y **k** se obtiene lo siguiente

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array}$$

Como ayuda para recordar los productos cruz anteriores, primero observe que el producto cruz de cualquiera de los vectores unitarios i, j, o k consigo mismo tiene como resultado el vector cero. Loa otros seis productos cruz pueden obtenerse de las figura 23. aplicando la siguiente regla: el producto cruz de dos vectores consecutivos, en el sentido del giro de las manecillas del reloj, es el siguiente vector; y el producto cruz de dos vectores consecutivos, en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj es negativo del vector siguiente

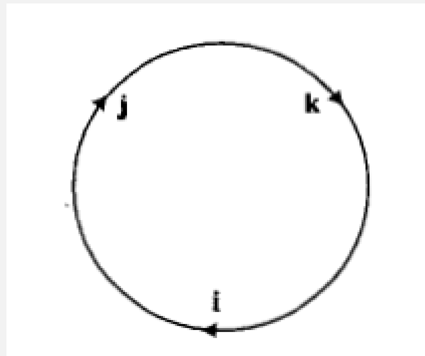


Figura 23

Teorema: si A y B son dos vectores cualesquiera de V_3 entonces **AXB = - (BXA)**

PROBLEMARIO XV1: PRODUCTO PUNTO, PRODUCTO CRUZ

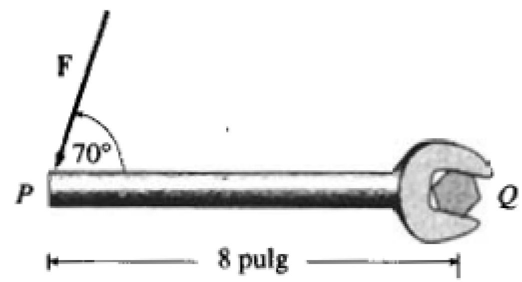
En los ejercicios del 1 al 4 calcule A.B (A punto B)

1. (a) $\mathbf{A} = \langle -1, 2\rangle, \mathbf{B} = \langle -4, 3\rangle$
   (b) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
2. (a) $\mathbf{A} = \langle \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\rangle, \mathbf{B} = \langle \frac{5}{2}, \frac{4}{3}\rangle$
   (b) $\mathbf{A} = -2\mathbf{i}, \mathbf{B} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$
3. (a) $\mathbf{A} = \langle \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\rangle, \mathbf{B} = \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}\rangle$
   (b) $\mathbf{A} = 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
4. (a) $\mathbf{A} = \langle 4, 0, 2,\rangle, \mathbf{B} = \langle 5, 2, -1\rangle$
   (b) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}; \mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

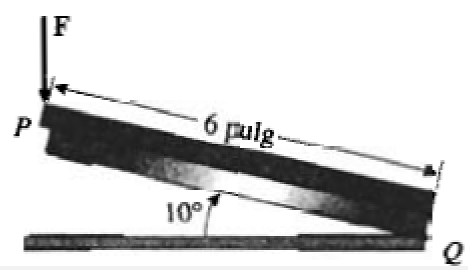
En los ejercicios del 1 al 4, A= (1, 2, 3); **B** = (4, -3, -1), **C** = (-5, -3, 5), **D** = (-2, 1, 6), E = (4, 0, -7) y **F** = (0, 2, 1)

1. Obtenga $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
2. Calcule $\mathbf{D} \times \mathbf{E}$.
3. Determine $(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{F})$.
4. Obtenga $(\mathbf{C} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{F})$.

33. En la figura adjunta, un tornillo en el punto Q se gira al aplicar en el punto P una fuerza $\mathbf{F}$ de 25 lb en un ángulo de 70° con respecto a la llave, la cual mide 8 pulg de longitud. Calcule la intensidad (o módulo) del vector torque generado por la fuerza en el tornillo.



34. Una fuerza $\mathbf{F}$ de 30 lb en la dirección hacia abajo se aplica en un punto P, que es el extremo izquierdo de la palanca de la engrapadora mostrada en la figura adjunta. La longitud de la palanca es de 6 pulg y, en reposo, la palanca forma un ángulo de 10° con la base horizontal de la engrapadora en el punto Q. Obtenga la intensidad (o módulo) del vector torque ejercido por $\mathbf{F}$ en Q.



BIBLIOGRAFÍA.

[1] LOUIS LEITHOLD, Cálculo 7 ed.

[2] CHARLES H. LEHMANN, Geometría analítica,

[3] SWOKOWSKI, E, *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*

[4] LARSON/ HOSTETLER/ EDWARDS, *Cálculo y Geometría Analítica Vol. 1*

[5] SILVIA, JUAN MANUEL, *Fundamentos de matemáticas: álgebra, geometría y trigonometría.*